7. Линейность и степень точки. 11 августа

Обозначение. Через $P(X, \omega)$ будем обозначать степень точки X относительно окружности ω (возможно, нулевого радиуса).

Осознание. Пусть ω_1 и ω_2 — две окружности. Тогда

$$f(X) = P(X, \omega_1) - P(X, \omega_2)$$

линейная функция по переменной X.

Напоминание. Если точка X лежит на отрезке AB, то для любой линейной функции f выполнено[1]

$$f(X) = \frac{BX}{AB} f(A) + \frac{AX}{AB} f(B).$$

1. Окружности ω, γ_1, γ_2 проходят через точку A, при этом окружности γ_1 и γ_2 вторично пересекаются в точке B, окружности ω и γ_1 — в точке P, а ω и γ_2 — в точке Q. Оказалось, что PB — касательная к γ_2, а QB — касательная к γ_1. Прямые PB и QB вторично пересекают описанную окружность треугольника PAQ в точках M и N. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

2. В треугольнике ABC точки E и F на сторонах AC и BC таковы, что $AE = BF$. Окружности (ACF) и (BCE) пересекаются вторично в точке D. Докажите, что CD — биссектриса угла $\angle ACB$.

3. В треугольнике ABC точка D на стороне BC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает AC в точке F, описанная окружность треугольника ACD пересекает AB в точке E. Докажите, что при изменении D окружность AEF проходит через фиксированную точку, лежащую на медиане из вершины A.

4. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, ω — описанная окружность треугольника BOC. Прямая AO пересекает окружность ω в точке G. Пусть M — середина BC, серединный перпендикуляр к BC пересекает ω в точках O и N. Докажите, что середина отрезка AN лежит на радикальной оси окружности OMG и окружности с диаметром AO.

[1] выбор коэффициентов я проверю так: если $X = B$, то должно получиться $f(B)$

«Спектр», 10 класс Регина, август 2022

7. Линейность и степень точки. 11 августа

Обозначение. Через $P(X, \omega)$ будем обозначать степень точки X относительно окружности ω (возможно, нулевого радиуса).

Осознание. Пусть ω_1 и ω_2 — две окружности. Тогда

$$f(X) = P(X, \omega_1) - P(X, \omega_2)$$

линейная функция по переменной X.

Напоминание. Если точка X лежит на отрезке AB, то для любой линейной функции f выполнено[1]

$$f(X) = \frac{BX}{AB} f(A) + \frac{AX}{AB} f(B).$$

1. Окружности ω, γ_1, γ_2 проходят через точку A, при этом окружности γ_1 и γ_2 вторично пересекаются в точке B, окружности ω и γ_1 — в точке P, а ω и γ_2 — в точке Q. Оказалось, что PB — касательная к γ_2, а QB — касательная к γ_1. Прямые PB и QB вторично пересекают описанную окружность треугольника PAQ в точках M и N. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

2. В треугольнике ABC точки E и F на сторонах AC и BC таковы, что $AE = BF$. Окружности (ACF) и (BCE) пересекаются вторично в точке D. Докажите, что CD — биссектриса угла $\angle ACB$.

3. В треугольнике ABC точка D на стороне BC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает AC в точке F, описанная окружность треугольника ACD пересекает AB в точке E. Докажите, что при изменении D окружность AEF проходит через фиксированную точку, лежащую на медиане из вершины A.

4. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, ω — описанная окружность треугольника BOC. Прямая AO пересекает окружность ω в точке G. Пусть M — середина BC, серединный перпендикуляр к BC пересекает ω в точках O и N. Докажите, что середина отрезка AN лежит на радикальной оси окружности OMG и окружности с диаметром AO.

[1] выбор коэффициентов я проверю так: если $X = B$, то должно получиться $f(B)$

5. В треугольнике ABC точки P, Q, R на сторонах BC, CA, AB соответственно. Пусть ω_A, ω_B, ω_C — описанные окружности треугольников AQR, BRP, CPQ соответственно. Отрезок AP пересекает ω_A, ω_B, ω_C в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $XY/XZ = BP/CP$.

6. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O, M — середина BC, D — основание высоты из A, OD и AM пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на радикальной оси окружности BOC и окружности девяти точек треугольника ABC.

7. Дан треугольник. На вписанной окружности отметили точку X и из неё провели три отрезка касательных ко вневписанным. Оказалось, что из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник. Докажите, что X лежит на средней линии исходного треугольника.

Задачи, про которые я не понял, стоит ли их добавить

8. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P and Q be variable points inside this quadrilateral so that $\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$. Prove that the lines PQ obtained in this way all pass through a fixed point, or they are all parallel. *Говорят, можно угадать точку и всё получится.*

9. Let A, B, C, D, E, F be six points, no three collinear and no four concyclic. Let P, Q, R be the intersection points of perpendicular bisectors of pairs of segments (AD, BE), (BE, CF), (CF, DA), and P_0, Q_0, R_0 be the intersection points of perpendicular bisectors of pairs of segments (AE, BD), (BF, CE), (CA, DF). Show that $P \neq P_0$, $Q \neq Q_0$, $R \neq R_0$ and prove that PP_0, QQ_0, RR_0 are concurrent or all parallel. *Я просто даже не начал решать.*

10. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая, проходящая через D и перпендикулярная EF, пересекает ω вторично в точке R. Прямая AR пересекает ω вторично в точке P. Окружности, описанные около треугольников PCE и PBF, пересекаются вторично в точке Q. Докажите, что прямые DI и PQ пересекаются на прямой, проходящей через A и перпендикулярной AI. *Судя по источнику, тут если и есть решение по теме, то оно очень жёсткое.*

5. В треугольнике ABC точки P, Q, R на сторонах BC, CA, AB соответственно. Пусть ω_A, ω_B, ω_C — описанные окружности треугольников AQR, BRP, CPQ соответственно. Отрезок AP пересекает ω_A, ω_B, ω_C в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $XY/XZ = BP/CP$.

6. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O, M — середина BC, D — основание высоты из A, OD и AM пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на радикальной оси окружности BOC и окружности девяти точек треугольника ABC.

7. Дан треугольник. На вписанной окружности отметили точку X и из неё провели три отрезка касательных ко вневписанным. Оказалось, что из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник. Докажите, что X лежит на средней линии исходного треугольника.

Задачи, про которые я не понял, стоит ли их добавить

8. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P and Q be variable points inside this quadrilateral so that $\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$. Prove that the lines PQ obtained in this way all pass through a fixed point, or they are all parallel. *Говорят, можно угадать точку и всё получится.*

9. Let A, B, C, D, E, F be six points, no three collinear and no four concyclic. Let P, Q, R be the intersection points of perpendicular bisectors of pairs of segments (AD, BE), (BE, CF), (CF, DA), and P_0, Q_0, R_0 be the intersection points of perpendicular bisectors of pairs of segments (AE, BD), (BF, CE), (CA, DF). Show that $P \neq P_0$, $Q \neq Q_0$, $R \neq R_0$ and prove that PP_0, QQ_0, RR_0 are concurrent or all parallel. *Я просто даже не начал решать.*

10. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая, проходящая через D и перпендикулярная EF, пересекает ω вторично в точке R. Прямая AR пересекает ω вторично в точке P. Окружности, описанные около треугольников PCE и PBF, пересекаются вторично в точке Q. Докажите, что прямые DI и PQ пересекаются на прямой, проходящей через A и перпендикулярной AI. *Судя по источнику, тут если и есть решение по теме, то оно очень жёсткое.*