8. Конечные плоскости: существование. 11 августа

1. Пусть p — простое число. Докажите, что существует конечная афинная плоскость порядка p. *Как следствие, существует и конечная проективная плоскость порядка p.*

Комментарий. В задаче **1.** можно заменить p на p^k. Верна следующая **теорема Брука–Райзера, 1949**:

> если конечная проективная плоскость порядка q существует и $q \equiv 1, 2 \pmod 4$, то q должно быть суммой двух квадратов.

Теорема, например, исключает существование проективных плоскостей порядков 6 и 14, но позволяет существование плоскостей порядков 10 и 12. В 1988 году с помощью компьютера было доказано, что плоскости порядка 10 не существует.

2. Из 25 космонавтов нужно выбрать пятерых — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с пятью экипажами по 5 человек в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

3. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате 57×57 так, чтобы в пересечении любых двух строк и двух столбцов была хотя бы одна неотмеченная клетка?

4. Саша хочет покрасить стороны и диагонали некоторого выпуклого n-угольника в 12 цветов (хотя бы два цвета должны встречаться). Саша хочет, чтобы для любых трёх вершин этого n-угольника, треугольник, образованных этими тремя вершинами, имел или три стороны одного цвета, или три стороны попарно различных цветов. Для какого наибольшего n Саше удастся это сделать?

5. Докажите, что в множестве из 400 элементов можно выбрать 400 подмножеств, каждое из 57 элементов, так, что любые два из них пересекаются ровно по 8 элементам.

Не забудьте перевернуть листочек!

«Спектр», 10 класс *Регина, август 2022*

8. Конечные плоскости: существование. 11 августа

1. Пусть p — простое число. Докажите, что существует конечная афинная плоскость порядка p. *Как следствие, существует и конечная проективная плоскость порядка p.*

Комментарий. В задаче **1.** можно заменить p на p^k. Верна следующая **теорема Брука–Райзера, 1949**:

> если конечная проективная плоскость порядка q существует и $q \equiv 1, 2 \pmod 4$, то q должно быть суммой двух квадратов.

Теорема, например, исключает существование проективных плоскостей порядков 6 и 14, но позволяет существование плоскостей порядков 10 и 12. В 1988 году с помощью компьютера было доказано, что плоскости порядка 10 не существует.

2. Из 25 космонавтов нужно выбрать пятерых — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с пятью экипажами по 5 человек в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

3. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате 57×57 так, чтобы в пересечении любых двух строк и двух столбцов была хотя бы одна неотмеченная клетка?

4. Саша хочет покрасить стороны и диагонали некоторого выпуклого n-угольника в 12 цветов (хотя бы два цвета должны встречаться). Саша хочет, чтобы для любых трёх вершин этого n-угольника, треугольник, образованных этими тремя вершинами, имел или три стороны одного цвета, или три стороны попарно различных цветов. Для какого наибольшего n Саше удастся это сделать?

5. Докажите, что в множестве из 400 элементов можно выбрать 400 подмножеств, каждое из 57 элементов, так, что любые два из них пересекаются ровно по 8 элементам.

Не забудьте перевернуть листочек!

6. Два шерифа соседних городов составили список из 7 подозреваемых в качестве серийного убийцы. Потом каждый из них, проведя оперативно-разыскные действия, сократил список подозреваемых до двух человек. Эти списки различны, т. е. пересекаются только по одному подозреваемому, поэтому шерифы, обменявшись информацией, могут совместно арестовать убийцу (а в одиночку они этого сделать не могут). Но если эта информация будет перехвачена и станет известна жителям, то они поймут, кто убийца, и линчуют его, не дожидаясь ареста (список из семи подозреваемых им известен). Как шерифам обменяться информацией, чтобы арестовать убийцу (и тем самым не допустить суда Линча)?

7. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причём отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из десяти цветов. Петя хочет покрасить каждую точку в один из этих цветов так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Обязательно ли Пете это удастся?

6. Два шерифа соседних городов составили список из 7 подозреваемых в качестве серийного убийцы. Потом каждый из них, проведя оперативно-разыскные действия, сократил список подозреваемых до двух человек. Эти списки различны, т. е. пересекаются только по одному подозреваемому, поэтому шерифы, обменявшись информацией, могут совместно арестовать убийцу (а в одиночку они этого сделать не могут). Но если эта информация будет перехвачена и станет известна жителям, то они поймут, кто убийца, и линчуют его, не дожидаясь ареста (список из семи подозреваемых им известен). Как шерифам обменяться информацией, чтобы арестовать убийцу (и тем самым не допустить суда Линча)?

7. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причём отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из десяти цветов. Петя хочет покрасить каждую точку в один из этих цветов так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Обязательно ли Пете это удастся?