9. Теорема Брауэра. 12 августа

1 (Теорема Брауэра; частный случай). Пусть T — треугольник с границей. Отображение $f\colon T \to T$ является непрерывным. Докажите, что существует такая точка $x \in T$, что $f(x) = x$. *Указание: лемма Шпернера.*

Следующий набор задач нужен для «расширения» множества фигур, для которых верна теорема Брауэра о неподвижной точке. Все множества лежат в $\mathbb{R}^n$.

2. Докажите, что $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение тогда и только тогда, когда для любого открытого $U \subset \mathbb{R}^m$ множество

$$g^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon g(x) \in U\}$$

открыто («прообраз открытого открыт»).

3*. Пусть $g\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; X — секвенциальный компакт.
a) Осознайте, что Y — секвенциальный компакт.
b) Докажите, что $g^{-1}\colon Y \to X$ — непрерывное отображение.

4. Пусть $g\colon T \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; T — треугольник с границей. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f\colon Y \to Y$ существует такая точка $x \in Y$, что $f(x) = x$.

$\mathbf{0}_1$**.** Придумайте непрерывное отображение треугольника на круг, четырёхугольника на круг.

5. Пусть C — круг, ω — его граница. Существует ли непрерывное отображение $f\colon C \to \omega$ такое, что для любого $x \in \omega$ $f(x) = x$?

«Спектр», 10 класс *Регина, август 2022*

9. Теорема Брауэра. 12 августа

1 (Теорема Брауэра; частный случай). Пусть T — треугольник с границей. Отображение $f\colon T \to T$ является непрерывным. Докажите, что существует такая точка $x \in T$, что $f(x) = x$. *Указание: лемма Шпернера.*

Следующий набор задач нужен для «расширения» множества фигур, для которых верна теорема Брауэра о неподвижной точке. Все множества лежат в $\mathbb{R}^n$.

2. Докажите, что $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение тогда и только тогда, когда для любого открытого $U \subset \mathbb{R}^m$ множество

$$g^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon g(x) \in U\}$$

открыто («прообраз открытого открыт»).

3*. Пусть $g\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; X — секвенциальный компакт.
a) Осознайте, что Y — секвенциальный компакт.
b) Докажите, что $g^{-1}\colon Y \to X$ — непрерывное отображение.

4. Пусть $g\colon T \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; T — треугольник с границей. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f\colon Y \to Y$ существует такая точка $x \in Y$, что $f(x) = x$.

$\mathbf{0}_1$**.** Придумайте непрерывное отображение треугольника на круг, четырёхугольника на круг.

5. Пусть C — круг, ω — его граница. Существует ли непрерывное отображение $f\colon C \to \omega$ такое, что для любого $x \in \omega$ $f(x) = x$?