

10. Ликбез по анализу на плоскости. 13 августа

Часть 1. Топология

Определение. ε -окрестность; внутренние, внешние и граничные точки фигуры F .

Определение. Множество F называется *открытым*, если любая точка $X \in F$ является внутренней для F . Множество F называется *замкнутым*, если дополнение F открыто.

Вопрос. Каким является пустое множество? Всё пространство?

1. Докажите, что множество F замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.
2. Докажите, что пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто, а пересечение конечного количества открытых открыто. Обязательно ли объединение бесконечного количества замкнутых множеств будет замкнутым множеством? А пересечение открытых – открытым?
3. Докажите, что множество граничных точек любого множества замкнуто.
4. Докажите, что наименьшее замкнутое множество, содержащее F , есть множество всех граничных и внутренних точек F .

Часть 2. Секвенциальная компактность

Определение. Множество X называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся к некоторому элементу из X подпоследовательность.

Осознание. Поймите, что любое конечное множество является секвенциально компактным.

5. Докажите, что декартово произведение двух секвенциально компактных множеств является секвенциально компактным (с покоординатной сходимостью).

6. а) Докажите, что счётное декартово произведение конечных множеств является секвенциально компактным.

б) Выведите из пункта а) секвенциальную компактность $[0, 1]$.

Осознание. Докажите, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится к x тогда и только тогда, когда x_n сходится к x покоординатно.

Осознание. Докажите, что куб $[0, 1]^n$ секвенциально компактен.

7. Докажите, что секвенциальный компакт в \mathbb{R}^n а) ограничен; б) замкнут.

8. Докажите, что в \mathbb{R}^n замкнутое подмножество секвенциального компакта секвенциально компактно.

9. Докажите, что множество в \mathbb{R}^n секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

10. Докажите, что следующее подмножество $[0, 1]^5$ секвенциально компактно:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 x_2 + x_3^3 + 17x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 \geq 0 \end{cases} .$$

11*. Докажите, что счётное декартово произведение секвенциальных компактов секвенциально компактно (с покоординатной сходимостью).

Часть 3. Непрерывность

Определение 1. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* x_0 , если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 , последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$.

Определение 2. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* x_0 , если для любой ε -окрестности B_ε точки $f(x_0)$, найдётся такая δ_ε -окрестность B_δ точки x_0 , что для любой точки $x \in B_\delta$ выполнено $f(x) \in B_\varepsilon$.

Комментарий. Определения 1 и 2 эквивалентны, но мы этого, доказывать, конечно же, не будем.

12. Пусть X — секвенциальный компакт (например, отрезок $[a, b]$), а функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что f ограничена на X и достигает на X своего наибольшего значения.

13. а) Докажите, что при условии $x_i \geq 0$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ существует максимум выражения $x_1^1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n$ (или какого-то похожего).

б) Докажите, что среди треугольников с периметром 1 существует треугольник наибольшей площади.

Часть 4. Компактность

Определение. Семейство множеств $\{U_\alpha\}$ называется *открытым покрытием* множества F , если, во-первых, каждое из U_α является открытым, а во-вторых, $F \subset \bigcup U_\alpha$.

Определение. Множество F называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

14. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — компактно. Докажите, что F а) ограничено; б) замкнуто.

15. Докажите, что замкнутое подмножество компакта — компакт.

16. Докажите, что а) $[0, 1]$; б) $[0, 1]^n$ — компакт.

17. Докажите, что $F \subset \mathbb{R}^n$ — компакт тогда и только тогда, когда F замкнуто и ограничено.

Комментарий. Тем самым $F \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно. Однако в общем случае это неверно! Но это совсем другая история. . .