11. Игры Шпрага–Гранди. 14 августа

0_1. Сформулируйте требования, предъявленные к играм (отсутствие ничьей, симметричность, конечность, ограниченность), на языке графов.

1. Докажите, что в любой ограниченной симметричной игре без ничьей у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

2. На столе выложен некоторый набор из следующих монет: 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек и 1 рубль. Каждый игрок за один ход может взять любую из монет и разменять ее меньшими монетами, но на ту же сумму. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
a) Исследуйте ситуацию, в которой на доске лежат ровно две одинаковых монеты.
b) Докажите, что если у кого-то из игроков есть выигрышная стратегия в некой конфигурации A, то у этого же игрока есть выигрышная стратегия в конфигурации полученной из A добавлением двух монет одного и того же достоинства.
c) Докажите, что если у кого-то из игроков есть выигрышная стратегия в некой конфигурации A, то у этого же игрока есть выигрышная стратегия в конфигурации полученной из предыдущей удалением двух монет одного и того же достоинства.
d) С помощью пунктов b) и c) докажите, что если на доске ситуация 2, 3, 10, 15, то выигрывает первый.
e) Аналогично докажите, что если на доске нет 15 копеек, то второй выигрывает тогда и только тогда, когда количество монет каждого достоинства — четное число.
f) Докажите, что комбинация 2, 5, 10, 15 проигрышна для начинающего.
g) Докажите, что добавление набора 2, 5, 10, 15 не меняет результата игры.
h) Как определить кто выигрывает при произвольном наборе монет?

Определение. Пусть G и H симметричные игры без ничьей. Их суммой (далее $G+H$) назовем игру со следующими правилами: за один ход можно сделать ход в любой из игр G или H (но только в одной из них). Игра заканчивается, когда закончены обе игры. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

0_2. Проверьте ассоциативность операции «+».

4. Сформулируйте определение суммы игр с точки зрения графов.

«Спектр», 10 класс Регина, август 2022

11. Игры Шпрага–Гранди. 14 августа

0_1. Сформулируйте требования, предъявленные к играм (отсутствие ничьей, симметричность, конечность, ограниченность), на языке графов.

1. Докажите, что в любой ограниченной симметричной игре без ничьей у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

2. На столе выложен некоторый набор из следующих монет: 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек и 1 рубль. Каждый игрок за один ход может взять любую из монет и разменять ее меньшими монетами, но на ту же сумму. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
a) Исследуйте ситуацию, в которой на доске лежат ровно две одинаковых монеты.
b) Докажите, что если у кого-то из игроков есть выигрышная стратегия в некой конфигурации A, то у этого же игрока есть выигрышная стратегия в конфигурации полученной из A добавлением двух монет одного и того же достоинства.
c) Докажите, что если у кого-то из игроков есть выигрышная стратегия в некой конфигурации A, то у этого же игрока есть выигрышная стратегия в конфигурации полученной из предыдущей удалением двух монет одного и того же достоинства.
d) С помощью пунктов b) и c) докажите, что если на доске ситуация 2, 3, 10, 15, то выигрывает первый.
e) Аналогично докажите, что если на доске нет 15 копеек, то второй выигрывает тогда и только тогда, когда количество монет каждого достоинства — четное число.
f) Докажите, что комбинация 2, 5, 10, 15 проигрышна для начинающего.
g) Докажите, что добавление набора 2, 5, 10, 15 не меняет результата игры.
h) Как определить кто выигрывает при произвольном наборе монет?

Определение. Пусть G и H симметричные игры без ничьей. Их суммой (далее $G+H$) назовем игру со следующими правилами: за один ход можно сделать ход в любой из игр G или H (но только в одной из них). Игра заканчивается, когда закончены обе игры. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

0_2. Проверьте ассоциативность операции «+».

4. Сформулируйте определение суммы игр с точки зрения графов.

Определение. Будем называть две игры A и B *неразличимыми* или *эквивалентными по Гранди* и писать $A \simeq B$, если в игре $A+B$ выигрывает второй игрок.

5. Проверьте, что $\simeq$ является отношением эквивалентности.

0_3. Докажите, что все проигрышные игры образуют класс эквивалентности по отношению $\simeq$.

0_4. Докажите, что если $A_1 \simeq A_2$ и $B_1 \simeq B_2$, то $A_1 + B_1 \simeq A_2 + B_2$.

Таким образом, неразличимые игры можно свободно заменять друг на друга в рассуждениях если речь идет о сложении игр.

6 (игра НИМ). На столе лежат несколько кучек камней. За один ход игрок должен одну из кучек и взять из нее любое число камней. Кто не может сделать ход, тот проиграл.

Обозначим через $\widehat{k}$ игру НИМ с одной кучкой из k камней. Тогда игра НИМ с n кучками, содержащими a_1, a_2,..., a_n камней, представляет собой сумму игр $\widehat{a_1} + \widehat{a_2} + \ldots + \widehat{a_n}$.

a) Кто выигрывает когда кучки две?

b) Докажите, что если $i \neq j$, то игры $\widehat{i}$ и $\widehat{j}$ не эквивалентны по Гранди.

c) Рассмотрим игру $\widehat{n} + \widehat{m} + \widehat{k}$. Обозначним через $n \oplus m$ поразрядное сложение соответствующих двоичных чисел. Пусть $n \oplus m \oplus k = 0$. Докажите, что второй выигрывает.

d) Докажите, что $\hat{n} + \hat{m} \simeq (\widehat{n \oplus m})$.

7 (основная теорема теории игр). Если A — игра на конечном ациклическом графе, то $A = \widehat{n}$, для некоторого $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Идея доказательства: индукция по N. Сформулируйте и проверьте базу.

b) Переход: рассмотрим игру G, которая кончается максимум за $k+1$ ход. Сделаем в ней все варианты первого хода. В результате получим множество игр: $G_1 \simeq \widehat{i_1}$, $G_2 \simeq \widehat{i_2}$, ..., $G_m \simeq \widehat{i_m}$. Обозначим через n минимальное число в множестве $\mathbb{N}_0 \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Докажите, что $G = \widehat{n}$.

8. Приведите пример конечной, но неограниченной игры, не равной ни одному $\hat{n}$.

Определение. Будем называть две игры A и B *неразличимыми* или *эквивалентными по Гранди* и писать $A \simeq B$, если в игре $A+B$ выигрывает второй игрок.

5. Проверьте, что $\simeq$ является отношением эквивалентности.

0_3. Докажите, что все проигрышные игры образуют класс эквивалентности по отношению $\simeq$.

0_4. Докажите, что если $A_1 \simeq A_2$ и $B_1 \simeq B_2$, то $A_1 + B_1 \simeq A_2 + B_2$.

Таким образом, неразличимые игры можно свободно заменять друг на друга в рассуждениях если речь идет о сложении игр.

6 (игра НИМ). На столе лежат несколько кучек камней. За один ход игрок должен одну из кучек и взять из нее любое число камней. Кто не может сделать ход, тот проиграл.

Обозначим через $\widehat{k}$ игру НИМ с одной кучкой из k камней. Тогда игра НИМ с n кучками, содержащими a_1, a_2,..., a_n камней, представляет собой сумму игр $\widehat{a_1} + \widehat{a_2} + \ldots + \widehat{a_n}$.

a) Кто выигрывает когда кучки две?

b) Докажите, что если $i \neq j$, то игры $\widehat{i}$ и $\widehat{j}$ не эквивалентны по Гранди.

c) Рассмотрим игру $\widehat{n} + \widehat{m} + \widehat{k}$. Обозначним через $n \oplus m$ поразрядное сложение соответствующих двоичных чисел. Пусть $n \oplus m \oplus k = 0$. Докажите, что второй выигрывает.

d) Докажите, что $\hat{n} + \hat{m} \simeq (\widehat{n \oplus m})$.

7 (основная теорема теории игр). Если A — игра на конечном ациклическом графе, то $A = \widehat{n}$, для некоторого $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Идея доказательства: индукция по N. Сформулируйте и проверьте базу.

b) Переход: рассмотрим игру G, которая кончается максимум за $k+1$ ход. Сделаем в ней все варианты первого хода. В результате получим множество игр: $G_1 \simeq \widehat{i_1}$, $G_2 \simeq \widehat{i_2}$, ..., $G_m \simeq \widehat{i_m}$. Обозначим через n минимальное число в множестве $\mathbb{N}_0 \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Докажите, что $G = \widehat{n}$.

8. Приведите пример конечной, но неограниченной игры, не равной ни одному $\hat{n}$.