## 12. Справедливый делёж. 15 августа

**1.** Как честно (т.е. чтобы каждый получил хотя бы половину) поделить торт между двумя людьми, если у каждого свои представления о том, насколько ценен тот или иной кусок? Каждый может отрезать от торта кусок любой ценности.

**Определение.** Пусть имеется $n$ непрерывных неубывающих функций $F_i\colon [0,1] \to [0,1]$, причём $F_i(0) = 0$, $F_i(1) = 1$. Каждая из них задаёт на отрезке $[0,1]$ *меру*[1] $\mu_i$ по правилу $\mu_i([a,b]) := F_i(b) - F_i(a)$.

Разбиение $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ отрезка $[0,1]$ на отрезки назовём *справедливым дележём*, если для каждого $i$ выполнено $\mu_i(A_i) \geqslant \frac{1}{n}$.

**2.** Докажите, что существует справедливый делёж. *Указание: индукция по $n$.*

**Определение.** Разбиение $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отрезка $[0,1]$ на отрезки назовём *дележом без зависти*, если для каждых $i$ и $j$ выполнено неравенство $\mu_i(A_j) \leqslant \mu_i(A_i)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Разбиение $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ отрезка $[0,1]$ на отрезки назовём *$\varepsilon$-дележом без зависти*, если для каждых $i$ и $j$ выполнено неравенство $\mu_i(A_j) \leqslant \mu_i(A_i) + \varepsilon$.

**Осознание.** В задаче **1.** мы получили делёж без зависти.

*Не забудьте перевернуть листочек!*

[1] если честнее, то *веростностную меру*

«Спектр», 10 класс Регина, август 2022

12. Справедливый делёж. 15 августа

**1.** Как честно (т.е. чтобы каждый получил хотя бы половину) поделить торт между двумя людьми, если у каждого свои представления о том, насколько ценен тот или иной кусок? Каждый может отрезать от торта кусок любой ценности.

**Определение.** Пусть имеется $n$ непрерывных неубывающих функций $F_i\colon [0,1] \to [0,1]$, причём $F_i(0) = 0$, $F_i(1) = 1$. Каждая из них задаёт на отрезке $[0,1]$ *меру*[1] $\mu_i$ по правилу $\mu_i([a,b]) := F_i(b) - F_i(a)$.

Разбиение $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ отрезка $[0,1]$ на отрезки назовём *справедливым дележём*, если для каждого $i$ выполнено $\mu_i(A_i) \geqslant \frac{1}{n}$.

**2.** Докажите, что существует справедливый делёж. *Указание: индукция по $n$.*

**Определение.** Разбиение $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отрезка $[0,1]$ на отрезки назовём *дележом без зависти*, если для каждых $i$ и $j$ выполнено неравенство $\mu_i(A_j) \leqslant \mu_i(A_i)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Разбиение $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ отрезка $[0,1]$ на отрезки назовём *$\varepsilon$-дележом без зависти*, если для каждых $i$ и $j$ выполнено неравенство $\mu_i(A_j) \leqslant \mu_i(A_i) + \varepsilon$.

**Осознание.** В задаче **1.** мы получили делёж без зависти.

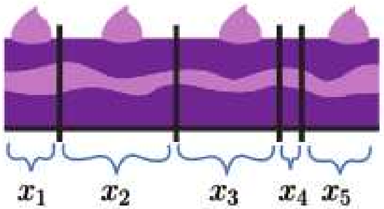
*Не забудьте перевернуть листочек!*

[1] если честнее, то *веростностную меру*

**Условие.** Будет считать, что каждая из $F_i$ строго монотонна. Другими словами, каждый считает, что лучше получить хоть что-то, чем не получить ничего.

Далее считаем, что $n = 3$.

Рассмотрим множество неотрицательных действительных чисел $x_1$, $x_2$, $x_3$, для которых $x_1+x_2+x_3 = 1$, а $x_i \geqslant 0$; обозначим через $B_k$ отрезок $[\sum_{i=1}^{k-1} x_i, \sum_{i=1}^{k} x_i]$. Получается, что каждой такой тройке соответствует некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ на отрезки.




**Осознание.** Осознайте, что множество таких троек это треугольник.

**3.** a) Докажите, что для любого $\eta > 0$ можно разрезать треугольник на меньшие треугольники, все стороны которых меньше $\eta$, вершины которых можно покрасить в три цвета правильным образом (т.е. чтобы у каждого треугольника все вершины были трёх разных цветов).
b) Пусть мы покрасили вершины в цвета 1, 2 и 3. Будем считать, что вершина цвета $i$ принадлежит человеку с номером $i$. Пусть $v$ — некоторая вершина, принадлежащая человеку $i$. Покрасим её в цвет $k$, если $\mu_i(B_k)$ — наибольшее из чисел $\mu_i(B_1)$, $\mu_i(B_2)$, $\mu_i(B_3)$. Докажите, что получившаяся раскраска удовлетворяет условию леммы Шпернера.
c) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon$-делёж без зависти. Для этого вам понадобится следующая задача.

**Определение.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной на* $X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x_1, x_2 \in X\colon |x_1 - x_2| < \delta$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

**4 (теорема Кантора).** Докажите, что непрерывная функция на секвенциальном компакте равномерно непрерывна на нём.

**5.** Докажите, что[2] существует делёж без зависти.

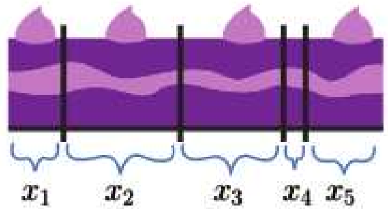
**Комментарий.** Если доказать пункт **3a).** для произвольного $n$, то мы докажем существование дележа без зависти для $n$ человек.

[2]если каждая из $F_i$ строго монотонна и непрерывна, а $n = 3$, то

**Условие.** Будет считать, что каждая из $F_i$ строго монотонна. Другими словами, каждый считает, что лучше получить хоть что-то, чем не получить ничего.

Далее считаем, что $n = 3$.

Рассмотрим множество неотрицательных действительных чисел $x_1$, $x_2$, $x_3$, для которых $x_1+x_2+x_3 = 1$, а $x_i \geqslant 0$; обозначим через $B_k$ отрезок $[\sum_{i=1}^{k-1} x_i, \sum_{i=1}^{k} x_i]$. Получается, что каждой такой тройке соответствует некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ на отрезки.




**Осознание.** Осознайте, что множество таких троек это треугольник.

**3.** a) Докажите, что для любого $\eta > 0$ можно разрезать треугольник на меньшие треугольники, все стороны которых меньше $\eta$, вершины которых можно покрасить в три цвета правильным образом (т.е. чтобы у каждого треугольника все вершины были трёх разных цветов).
b) Пусть мы покрасили вершины в цвета 1, 2 и 3. Будем считать, что вершина цвета $i$ принадлежит человеку с номером $i$. Пусть $v$ — некоторая вершина, принадлежащая человеку $i$. Покрасим её в цвет $k$, если $\mu_i(B_k)$ — наибольшее из чисел $\mu_i(B_1)$, $\mu_i(B_2)$, $\mu_i(B_3)$. Докажите, что получившаяся раскраска удовлетворяет условию леммы Шпернера.
c) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon$-делёж без зависти. Для этого вам понадобится следующая задача.

**Определение.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной на* $X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x_1, x_2 \in X\colon |x_1 - x_2| < \delta$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

**4 (теорема Кантора).** Докажите, что непрерывная функция на секвенциальном компакте равномерно непрерывна на нём.

**5.** Докажите, что[2] существует делёж без зависти.

**Комментарий.** Если доказать пункт **3a).** для произвольного $n$, то мы докажем существование дележа без зависти для $n$ человек.

[2]если каждая из $F_i$ строго монотонна и непрерывна, а $n = 3$, то