13. Хакенбуш[1] и сюрреальные числа. 15 августа

Игра «Хакенбуш». *Позиции*: граф, рёбра которого раскрашены в синий и красный цвета, а некоторые из вершин объявлены находящимися на земле, причём от каждого из рёбер можно дойти до земли.

Ходы: Левый перерезает произвольное синее ребро, при этом все остальные рёбра, которые перестают быть связанными с землёй, исчезают; Правый перерезает красное ребро, при этом все остальные рёбра, которые перестают быть связанными с землёй, исчезают.

Комментарий. Хакенбуш — пример *пристрастной* (*несимметричной*, *неравноправной*) игры, в которой множества ходов игроков могут быть различные. Для них тоже можно доказать, что у одного из двух игроков всегда имеется выигрышная стратегия. При этом реализуется один из четырёх вариантов:

- Левый обладает выигрышной стратегией вне зависимости от того, кто начинает;
- Правый обладает выигрышной стратегией вне зависимости от того, кто начинает;
- начинающий игрок обладает выигрышной стратегией;
- второй игрок обладает выигрышной стратегией.

1. Докажите, что для заданной позиции в игре хакенбуш начинающий игрок никогда не обладает выигрышной стратегией, т.е. всегда выигрывает или Левый, или Правый, или второй игрок.

Определение. Игра называется *нулевой*, если второй игрок обладает выигрышной стратегией, *положительной* — если Левый обладает выигрышной стратегией, отрицательной — если Правый обладает выигрышной стратегией, *нечёткой* — если первый игрок обладает выигрышной стратегией.

2. Пусть g — позиция в игре хакенбуш. Рассмотрим позицию $-g$, где каждый цвет заменён на противоположный. Докажите, что $g + (-g)$ — нулевая игра.

Определение. Будем называть игры g и h равными, если сумма $g + (-h)$ — нулевая игра. **Обозначение.** $g = h$.

3. a) Докажите, что равенство — отношение эквивалентности.
b) Если $g = h$, то $g + f = h + f$ для любой игры f.
c) Если $g = h$, то g и h взаимозаменяемы как варианты позиций.
d) Сумма положительных игр положительна.

Определение. Будем говорить, что $g > h$, если $g - h > 0$. Учитывая задачу **3d).**, неравенства можно складывать.

Определение. Рассмотрим позицию в хакенбуше с единственным синим ребром. Так как у Левого есть ровно один «свободный» ход в этой позиции, мы будем считать её равной 1. Так же, как мы определили число(!) 0, мы определим число 1 как эту игру.

4. Вспоминая определение суммы игры, определите игры 10 и -7.
a) Убедитесь, что если $p > q$ (как числа), то $p > q$ (как игры).
b) Докажите, что *стебель бамбука* (т.е. путь, у которого один из концов на земле) с p синих рёбер равен игре p.

5. Обозначим стебель бамбука, у которого два ребра: нижнее — синее, верхнее — красное, за позицию g. Докажите, что
a) $g > 0$; b) $g < 1$; c) $g + g = 1$.
d) Докажите, что если $h + h = 1$, то $g = h$. Другими словами, обозначение $g = 1/2$ корректно.

6. Пусть g — стебель бамбука, состоящий из двух красных рёбер над одним синим.
a) Докажите, что $g + g = 1/2$;
b) Докажите, что $g + g + g + g = 1$.

7. Докажите, что любая позиция в игре хакенбуш больше любой позиции, полученной из неё удалением синего ребра, и меньше любой позиции, полученной удалением красного ребра.

Комментарий. Это объясняет выбранную терминологию: можно представлять себе, что Левый игрок всегда «сдвигает позицию по числовой прямой влево», а Правый — вправо.

Следствие. При игре в хакенбуш на нескольких стеблях бамбука достаточно рассматривать только ходы, разрезающие самые верхние рёбра нужного цвета в каждом из стеблей (т.е. если запретить все остальные ходы, то получится игра, равная исходной).

8. Пусть в стебле бамбука X есть рёбра обоих цветов, и пусть A и B — два стебля, получающиеся из X удалением самого верхнего красного и самого верхнего синего рёбер соответственно. Докажите, что $2X = A + B$.

Следствие. Каждому стеблю бамбука можно сопоставить некоторое двоично-рациональное число.

9. Как построить игру, равную $2/3$?

10. Как построить игру, большую любого конечного числа? А как построить положительную игру, меньшую любого положительного числа?

За подробностями и продолжением идите в книгу Пьера Деорнуа «Комбинаторная теория игр».

[1] рубка кустарника