14. МеждусоБой. 16 августа

1. Военная база имеет форму выпуклого многоугольника. В некоторых её точках расставлены радары. У каждого радара под наблюдением находится круг с центром в точке базы, где стоит этот радар (круги могут быть различными). Шпион стоит вне базы, и радары его не наблюдают. Верно ли, что он обязательно может уйти от базы на расстояние 100 км так, чтобы в процессе радары его не заметили?

2. Дан треугольник ABC, в котором угол A тупой. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр этого треугольника соответственно. Точка K симметрична точке H относительно A. Докажите, что точки K, O и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle A - \angle B = 90°$.

3. Для каждого натурального $d \geqslant 10$ найдите наименьшее N, для которого верно следующее утверждение.

> Пусть в графе нет изолированных вершин, а каждое его ребро содержится в простом пути из d рёбер. Тогда можно выбросить несколько (возможно, ни одного) рёбер так, чтобы в полученном графе изолированных вершин не появилось, каждое ребро по-прежнему содержалось в простом пути из d рёбер, но не осталось бы простых путей из N рёбер.

4. Найдите все последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ действительных чисел, в которых $|a_{2013}| \leqslant 2$, и для любых целых $n \geqslant k \geqslant 0$ выполнено соотношение $a_{n+k} + a_{n-k} = a_n a_k$.

5. Выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ разбит на треугольники диагоналями, не имеющими общих внутренних точек. Обозначим через t_i количество треугольников, примыкающих к вершине A_i. Докажите, что

$$t_1 - \cfrac{1}{t_2 - \cfrac{1}{\ldots - \cfrac{1}{t_{n-1}}}} = 0.$$

Не забудьте перевернуть листочек!

«Спектр», 10 класс *Регина, август 2022*

14. МеждусоБой. 16 августа

1. Военная база имеет форму выпуклого многоугольника. В некоторых её точках расставлены радары. У каждого радара под наблюдением находится круг с центром в точке базы, где стоит этот радар (круги могут быть различными). Шпион стоит вне базы, и радары его не наблюдают. Верно ли, что он обязательно может уйти от базы на расстояние 100 км так, чтобы в процессе радары его не заметили?

2. Дан треугольник ABC, в котором угол A тупой. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр этого треугольника соответственно. Точка K симметрична точке H относительно A. Докажите, что точки K, O и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle A - \angle B = 90°$.

3. Для каждого натурального $d \geqslant 10$ найдите наименьшее N, для которого верно следующее утверждение.

> Пусть в графе нет изолированных вершин, а каждое его ребро содержится в простом пути из d рёбер. Тогда можно выбросить несколько (возможно, ни одного) рёбер так, чтобы в полученном графе изолированных вершин не появилось, каждое ребро по-прежнему содержалось в простом пути из d рёбер, но не осталось бы простых путей из N рёбер.

4. Найдите все последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ действительных чисел, в которых $|a_{2013}| \leqslant 2$, и для любых целых $n \geqslant k \geqslant 0$ выполнено соотношение $a_{n+k} + a_{n-k} = a_n a_k$.

5. Выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ разбит на треугольники диагоналями, не имеющими общих внутренних точек. Обозначим через t_i количество треугольников, примыкающих к вершине A_i. Докажите, что

$$t_1 - \cfrac{1}{t_2 - \cfrac{1}{\ldots - \cfrac{1}{t_{n-1}}}} = 0.$$

Не забудьте перевернуть листочек!

6. Во Дворце творчества юных работают 2013 кружков. Для любых двух кружков найдутся два школьника, посещающих оба этих кружка. Докажите, что часть школьников можно принять в пионеры, а остальных — в скауты так, чтобы в каждом кружке занимались и пионеры, и скауты.

7. В строку записано k чисел, равных 20,14. Разрешается ставить между ними знаки сложения и умножения, а также скобки. Можно ли при некотором $k < 50$ получить в результате целое число?

8. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle E$. Точки P и Q — середины сторон AB и DE соответственно. Докажите, что $S_{FAP} + S_{CBP} + S_{CFQ} = S_{ABCDEF}/2$ тогда и только тогда, когда $FA/FE = CD/CB$.

9. Целые числа a, b, c, большие 1, взаимно просты в совокупности. Найдите все возможные значения НОД$(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c)$.

10. На окружности стоят n фишек. За ход можно взять две из них и переместить в противоположных направлениях на равные дуги. Докажите, что не более, чем за $n - 1$ ход можно добиться того, чтобы точки, в которых стоят фишки, образовывали правильный n-угольник. (В исходной позиции и по ходу перемещения две или больше фишек могут находиться в одной точке.)

6. Во Дворце творчества юных работают 2013 кружков. Для любых двух кружков найдутся два школьника, посещающих оба этих кружка. Докажите, что часть школьников можно принять в пионеры, а остальных — в скауты так, чтобы в каждом кружке занимались и пионеры, и скауты.

7. В строку записано k чисел, равных 20,14. Разрешается ставить между ними знаки сложения и умножения, а также скобки. Можно ли при некотором $k < 50$ получить в результате целое число?

8. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle E$. Точки P и Q — середины сторон AB и DE соответственно. Докажите, что $S_{FAP} + S_{CBP} + S_{CFQ} = S_{ABCDEF}/2$ тогда и только тогда, когда $FA/FE = CD/CB$.

9. Целые числа a, b, c, большие 1, взаимно просты в совокупности. Найдите все возможные значения НОД$(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c)$.

10. На окружности стоят n фишек. За ход можно взять две из них и переместить в противоположных направлениях на равные дуги. Докажите, что не более, чем за $n - 1$ ход можно добиться того, чтобы точки, в которых стоят фишки, образовывали правильный n-угольник. (В исходной позиции и по ходу перемещения две или больше фишек могут находиться в одной точке.)