

1. «Очевидные» утверждения. 18 августа

1. Докажите, что нельзя построить пять равных квадратов с одной общей вершиной так, чтобы внутренности квадратов не пересекались.
2. Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом прямых.
3. В двудольной графе степень каждой вершины не превосходит d . Докажите, что можно добавить в него несколько вершин и несколько рёбер, что степень каждой вершины станет равна d .
4. Внутри треугольника лежит выпуклый четырёхугольник. Докажите, что периметр треугольника больше периметра четырёхугольника.
5. Имеется два трёхлитровых сосуда. В первом сосуде 1 л воды, во втором — 1 л 2% раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить 1,5% раствор соли в первом сосуде?
6. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает её вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета.
7. Может ли внутри и на границе квадрата со стороной n быть больше $(n + 1)^2$ целочисленных точек?
8. а) Некоторое множество отрезков содержит все рациональные точки числовой прямой. Верно ли, что из отрезков можно выбрать некоторое конечное количество, сумма длин которых больше 1?
б*) А если отрезки покрывают все точки?
9. Докажите, что к квадрату $ABCD$ нельзя приложить более восьми равных ему, касающихся $ABCD$ хотя бы в одной точке и непересекающихся во внутренних точках между собой и с $ABCD$ квадратов. Стороны квадратов не обязаны быть параллельными.
10. В Евклидии n городов. Известна стоимость проезда между любыми двумя городами. Существует 2 вида туристических маршрутов с объездом всех городов ровно по одному разу: *дорогие/дешёвые* маршруты — каждый следующий город в маршруте выбирается так, чтобы цена поездки до него была наибольшей/наименьшей. Докажите, что суммарная цена объезда городов по любому дорогому маршруту не может быть меньше суммарной цены любого дешёвого маршрута.

1. «Очевидные» утверждения. 18 августа

1. Докажите, что нельзя построить пять равных квадратов с одной общей вершиной так, чтобы внутренности квадратов не пересекались.
2. Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом прямых.
3. В двудольной графе степень каждой вершины не превосходит d . Докажите, что можно добавить в него несколько вершин и несколько рёбер, что степень каждой вершины станет равна d .
4. Внутри треугольника лежит выпуклый четырёхугольник. Докажите, что периметр треугольника больше периметра четырёхугольника.
5. Имеется два трёхлитровых сосуда. В первом сосуде 1 л воды, во втором — 1 л 2% раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить 1,5% раствор соли в первом сосуде?
6. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает её вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета.
7. Может ли внутри и на границе квадрата со стороной n быть больше $(n + 1)^2$ целочисленных точек?
8. а) Некоторое множество отрезков содержит все рациональные точки числовой прямой. Верно ли, что из отрезков можно выбрать некоторое конечное количество, сумма длин которых больше 1?
б*) А если отрезки покрывают все точки?
9. Докажите, что к квадрату $ABCD$ нельзя приложить более восьми равных ему, касающихся $ABCD$ хотя бы в одной точке и непересекающихся во внутренних точках между собой и с $ABCD$ квадратов. Стороны квадратов не обязаны быть параллельными.
10. В Евклидии n городов. Известна стоимость проезда между любыми двумя городами. Существует 2 вида туристических маршрутов с объездом всех городов ровно по одному разу: *дорогие/дешёвые* маршруты — каждый следующий город в маршруте выбирается так, чтобы цена поездки до него была наибольшей/наименьшей. Докажите, что суммарная цена объезда городов по любому дорогому маршруту не может быть меньше суммарной цены любого дешёвого маршрута.