

3. Точки и прямые. 19 августа

1. Двое играющих по очереди проводят на плоскости несовпадающие красные или синие прямые (цвет каждый выбирает независимо от предыдущих ходов), никакие три из которых не должны проходить через одну точку. После того, как они проведут по 20 прямых, первый игрок подсчитывает количество точек, в которых пересекаются прямые разных цветов, а второй — количество точек, в которых пересекаются прямые одного цвета. Выигрывает тот, у кого окажется больше точек. Может ли один из игроков выиграть независимо от игры другого?

2. На плоскости проведено несколько красных, синих и зеленых прямых (прямые всех трёх цветов есть). Известно, что каждая красная прямая пересекает менее двух третей всех синих прямых, а каждая синяя прямая пересекает менее двух третей всех зеленых прямых. Докажите, что есть зелёная прямая, которая пересекает не более половины всех красных прямых.

3. а) На плоскости нарисовано несколько прямых, причем через пересечение любых двух из них проходит еще хотя бы одна. Докажите, что тогда все прямые пересекаются в одной точке, либо параллельны.

б) На плоскости отмечено несколько точек, причем на прямой, соединяющей любые две точки лежит еще хотя бы одна точка. Докажите, что тогда все точки лежат на одной прямой.

4. Докажите, что если n точек не лежат на одной прямой, то среди прямых, их соединяющих, не менее n различных.

5. На плоскости дано семейство L , состоящее из 2012 прямых, среди которых нет параллельных и пересекающихся более чем по две в одной точке. Скажем, что прямая $l_1 \in L$ ограничивает другую прямую $l_2 \in L$, если все точки пересечения прямой l_2 с остальными прямыми из семейства L лежат по одну сторону от прямой l_1 . Докажите, что в семействе L найдутся две прямые l и l' такие, что прямая l ограничивает прямую l' , а прямая l' не ограничивает прямую l .

6. Замкнутая ломаная состоит из 1001 звена и такова, что никакие три ее вершины не лежат на одной прямой. Известно, что каждое ее звено, кроме, может быть, двух, пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов. Верно ли, что каждое из двух оставшихся звеньев тоже пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов?

Не забудьте перевернуть листочек!

3. Точки и прямые. 19 августа

1. Двое играющих по очереди проводят на плоскости несовпадающие красные или синие прямые (цвет каждый выбирает независимо от предыдущих ходов), никакие три из которых не должны проходить через одну точку. После того, как они проведут по 20 прямых, первый игрок подсчитывает количество точек, в которых пересекаются прямые разных цветов, а второй — количество точек, в которых пересекаются прямые одного цвета. Выигрывает тот, у кого окажется больше точек. Может ли один из игроков выиграть независимо от игры другого?

2. На плоскости проведено несколько красных, синих и зеленых прямых (прямые всех трёх цветов есть). Известно, что каждая красная прямая пересекает менее двух третей всех синих прямых, а каждая синяя прямая пересекает менее двух третей всех зеленых прямых. Докажите, что есть зелёная прямая, которая пересекает не более половины всех красных прямых.

3. а) На плоскости нарисовано несколько прямых, причем через пересечение любых двух из них проходит еще хотя бы одна. Докажите, что тогда все прямые пересекаются в одной точке, либо параллельны.

б) На плоскости отмечено несколько точек, причем на прямой, соединяющей любые две точки лежит еще хотя бы одна точка. Докажите, что тогда все точки лежат на одной прямой.

4. Докажите, что если n точек не лежат на одной прямой, то среди прямых, их соединяющих, не менее n различных.

5. На плоскости дано семейство L , состоящее из 2012 прямых, среди которых нет параллельных и пересекающихся более чем по две в одной точке. Скажем, что прямая $l_1 \in L$ ограничивает другую прямую $l_2 \in L$, если все точки пересечения прямой l_2 с остальными прямыми из семейства L лежат по одну сторону от прямой l_1 . Докажите, что в семействе L найдутся две прямые l и l' такие, что прямая l ограничивает прямую l' , а прямая l' не ограничивает прямую l .

6. Замкнутая ломаная состоит из 1001 звена и такова, что никакие три ее вершины не лежат на одной прямой. Известно, что каждое ее звено, кроме, может быть, двух, пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов. Верно ли, что каждое из двух оставшихся звеньев тоже пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов?

Не забудьте перевернуть листочек!

7. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

7. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.