

4. Прямоугольники и квадраты. 20 августа

1. Квадрат разбит на 2016 прямоугольников со сторонами, меньшими стороны квадрата. Назовем *узлом* точку, являющуюся вершиной хотя бы одного прямоугольника разбиения. Какое наименьшее количество узлов может лежать строго внутри исходного квадрата?

2. Квадрат разрезали на прямоугольники. Докажите, что сумма длин наименьших сторон всех этих прямоугольников не меньше длины стороны квадрата.

3. Квадрат разрезан на n прямоугольников (стороны которых параллельны сторонам квадрата). Каждая прямая, параллельная одной из сторон квадрата, которая пересекает внутренность квадрата, пересекает и внутренность некоторого прямоугольника. Докажите, что среди прямоугольников разбиения существует такой, который не примыкает ни к одной из сторон квадрата.

4. Квадрат разрезали на n прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

5. Бумажный квадрат разбит линиями, проведёнными карандашом, на 2019 прямоугольников. Докажите, что можно сделать не более 2018 прямолинейных разрезов, после которых бумажный квадрат распадётся в точности на нарисованные прямоугольники. Части нельзя накладывать друг на друга, а разрез не обязан начинаться или кончаться на краю.

6. Внутри прямоугольника R отмечены n точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной какой-либо стороне прямоугольника. Прямоугольник R разрезали на меньшие прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам R , так, что все отмеченные точки оказались на линиях разрезов. Докажите, что прямоугольников разбиения не меньше $n + 1$.

7. Дан квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нём проведены отрезки, параллельные сторонам, никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Отрезки разбили квадрат на прямоугольники. Каждая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а каждая горизонтальная прямая — ровно ℓ прямоугольников. Сколько прямоугольников может быть?

4. Прямоугольники и квадраты. 20 августа

1. Квадрат разбит на 2016 прямоугольников со сторонами, меньшими стороны квадрата. Назовем *узлом* точку, являющуюся вершиной хотя бы одного прямоугольника разбиения. Какое наименьшее количество узлов может лежать строго внутри исходного квадрата?

2. Квадрат разрезали на прямоугольники. Докажите, что сумма длин наименьших сторон всех этих прямоугольников не меньше длины стороны квадрата.

3. Квадрат разрезан на n прямоугольников (стороны которых параллельны сторонам квадрата). Каждая прямая, параллельная одной из сторон квадрата, которая пересекает внутренность квадрата, пересекает и внутренность некоторого прямоугольника. Докажите, что среди прямоугольников разбиения существует такой, который не примыкает ни к одной из сторон квадрата.

4. Квадрат разрезали на n прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

5. Бумажный квадрат разбит линиями, проведёнными карандашом, на 2019 прямоугольников. Докажите, что можно сделать не более 2018 прямолинейных разрезов, после которых бумажный квадрат распадётся в точности на нарисованные прямоугольники. Части нельзя накладывать друг на друга, а разрез не обязан начинаться или кончаться на краю.

6. Внутри прямоугольника R отмечены n точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной какой-либо стороне прямоугольника. Прямоугольник R разрезали на меньшие прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам R , так, что все отмеченные точки оказались на линиях разрезов. Докажите, что прямоугольников разбиения не меньше $n + 1$.

7. Дан квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нём проведены отрезки, параллельные сторонам, никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Отрезки разбили квадрат на прямоугольники. Каждая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а каждая горизонтальная прямая — ровно ℓ прямоугольников. Сколько прямоугольников может быть?