6. Области и прямые. 21 августа

1. На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых — в синий цвет. Докажите, что найдутся хотя бы две области, у которых границы полностью красные.

2. На белой плоскости проведено n прямых общего положения (т. е. никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Они разбили плоскость на куски. За ход можно перекрасить (белые — в черный цвет, а черные — в белый) все куски с одной из сторон от любой из проведенных прямых. Сколько различных раскрасок плоскости можно получить такими операциями?

3. Несколько прямых (никакие две из которых не параллельны друг другу) делят плоскость на части. В одной из частей отмечена точка A.
а) Докажите, что если A лежит в неограниченной области, то на плоскости найдётся такая точка B, что A и B лежат в разных полуплоскостях относительно каждой из прямых.
b[1]) Докажите, что если такая точка B нашлась, то A лежит в неограниченной области.

4. На плоскости проведено n прямых общего положения (т. е. никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Они разбили плоскость на конечные и бесконечные части. Каждую конечную часть покрасили в красный или зеленый цвет. За ход можно перекрасить все части внутри треугольника, образованного некоторыми тремя прямыми. Докажите, что такими операциями все части можно сделать красными.

5. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

Не забудьте перевернуть листочек!

[1]при первом прочтении можно пропустить

«Спектр», 8 класс *Регина, август 2022*

6. Области и прямые. 21 августа

1. На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых — в синий цвет. Докажите, что найдутся хотя бы две области, у которых границы полностью красные.

2. На белой плоскости проведено n прямых общего положения (т. е. никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Они разбили плоскость на куски. За ход можно перекрасить (белые — в черный цвет, а черные — в белый) все куски с одной из сторон от любой из проведенных прямых. Сколько различных раскрасок плоскости можно получить такими операциями?

3. Несколько прямых (никакие две из которых не параллельны друг другу) делят плоскость на части. В одной из частей отмечена точка A.
а) Докажите, что если A лежит в неограниченной области, то на плоскости найдётся такая точка B, что A и B лежат в разных полуплоскостях относительно каждой из прямых.
b[1]) Докажите, что если такая точка B нашлась, то A лежит в неограниченной области.

4. На плоскости проведено n прямых общего положения (т. е. никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Они разбили плоскость на конечные и бесконечные части. Каждую конечную часть покрасили в красный или зеленый цвет. За ход можно перекрасить все части внутри треугольника, образованного некоторыми тремя прямыми. Докажите, что такими операциями все части можно сделать красными.

5. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

Не забудьте перевернуть листочек!

[1]при первом прочтении можно пропустить

6. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой ℓ, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении ℓ и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны.

8. На плоскости проведено 300 прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди областей, образованных ими, есть не менее a) 100; b) 200; c*) 298 треугольников.

9. На плоскости проведено $n \geqslant 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета

10. Докажите, что для всех достаточно больших n верно следующее утверждение: в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница любой из ограниченных частей разбиения не оказалась полностью синей.

6. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой ℓ, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении ℓ и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны.

8. На плоскости проведено 300 прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди областей, образованных ими, есть не менее a) 100; b) 200; c*) 298 треугольников.

9. На плоскости проведено $n \geqslant 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета

10. Докажите, что для всех достаточно больших n верно следующее утверждение: в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница любой из ограниченных частей разбиения не оказалась полностью синей.