8. $\mathbf{a^n \pm 1}$. 23 августа

Утверждение. Пусть a, n и m — натуральные числа. Тогда

$$\text{НОД}(a^n-1, a^m-1) = a^{\text{НОД}(n,m)}-1.$$

Следствия. Пусть $a>1$, n, m, k — натуральные числа. Тогда
a) $a^n-1 \vdots a^m-1$ тогда и только тогда, когда $n \vdots m$.
b) если $a^n-1 \vdots k$ и $a^m-1 \vdots k$, то $a^{\text{НОД}(n,m)}-1 \vdots k$.
c) $\text{НОД}(a^n+1, a^m+1)$ делит $a^{2\cdot\text{НОД}(n,m)}-1$.

1. Пусть $p>3$ — простое, $m=\dfrac{4^p-1}{3}$. Докажите, что $2^{m-1}-1$ делится на m.

2. Пусть $a>1$ и n — натуральные числа. Докажите, что $\varphi(a^n-1)$ делится на n.

3. Пусть $a>2$ — натуральное число. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что a^n-1 делится на n.

4. Пусть $n>2$, k — натуральные числа. Докажите, что $2^k+1 \not\vdots\, 2^n-1$.

5. Докажите, что если $a^n+1 \vdots a^m+1$, то $n \vdots m$. Более того, если n/m есть нечётное число, то $a^n+1 \vdots a^m+1$

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 **не** делится на n^b+1.

7. Докажите, что для бесконечного количества составных чисел n число $3^{n-1}-2^{n-1}$ делится на n.

«Спектр», 8 класс Регина, август 2022

8. $\mathbf{a^n \pm 1}$. 23 августа

Утверждение. Пусть a, n и m — натуральные числа. Тогда

$$\text{НОД}(a^n-1, a^m-1) = a^{\text{НОД}(n,m)}-1.$$

Следствия. Пусть $a>1$, n, m, k — натуральные числа. Тогда
a) $a^n-1 \vdots a^m-1$ тогда и только тогда, когда $n \vdots m$.
b) если $a^n-1 \vdots k$ и $a^m-1 \vdots k$, то $a^{\text{НОД}(n,m)}-1 \vdots k$.
c) $\text{НОД}(a^n+1, a^m+1)$ делит $a^{2\cdot\text{НОД}(n,m)}-1$.

1. Пусть $p>3$ — простое, $m=\dfrac{4^p-1}{3}$. Докажите, что $2^{m-1}-1$ делится на m.

2. Пусть $a>1$ и n — натуральные числа. Докажите, что $\varphi(a^n-1)$ делится на n.

3. Пусть $a>2$ — натуральное число. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что a^n-1 делится на n.

4. Пусть $n>2$, k — натуральные числа. Докажите, что $2^k+1 \not\vdots\, 2^n-1$.

5. Докажите, что если $a^n+1 \vdots a^m+1$, то $n \vdots m$. Более того, если n/m есть нечётное число, то $a^n+1 \vdots a^m+1$

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 **не** делится на n^b+1.

7. Докажите, что для бесконечного количества составных чисел n число $3^{n-1}-2^{n-1}$ делится на n.