Задача 5.1. Докажите, что для любого натурального n: **а)** $n^3 + 5n$ делится на 6, **б)** $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Задача 5.2. Докажите тождества: **а)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ **б)** $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Задача 5.3. На плоскости провели несколько прямых. Докажите, что части, на которые они делят плоскость, всегда можно покрасить в два цвета так, чтобы соседние части были покрашены в разные цвета.

Задача 5.4. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — также целое при любом целом n.

Задача 5.5. На шахматной доске расставлены числа, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что они все равны.

Задача 5.6. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в любом столбце были фишки всех цветов.

Задача 5.7. Докажите, что число, составленное из 3^n единиц, делится на 3^n.

Задача 5.8. Маша и Володя играют в такую игру: есть квадрат 10×10, а за один ход можно закрасить прямоугольник 2×1 или 4×1. Ходят по очереди, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто же это будет?

Задача 5.9. Докажите неравенство: $|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n|$, где $x_1, \ldots, x_n$ — произвольные числа.

МЦНМО, Математический кружок, 8 класс **Занятие 5** **10 ноября 2007 года**

Дополнительные задачи

Задача 5.10. На плоскости проведено несколько прямых, причем известно, что через точку пересечения любых двух проходит по крайней мере еще одна прямая. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

Задача 5.11. При каких $n > 3$ набор гирь с массами $1, 2, 3, \ldots, n$ граммов можно разложить на три равные по массе кучки?