

Задача 22.1. Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гирия в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?

Задача 22.2. На столе стоят восемь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

Задача 22.3. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет: первый игрок или второй?

Задача 22.4. а) Найдите наибольшее натуральное n , для которого число $2008!$ делится на 37^n ; б) найдите наименьшее натуральное k , такое что $k!$ делится на 575757.

Задача 22.5. На физическом кружке учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами 1, 2, 3, ..., 16 грамм так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах?

Задача 22.6. Окружность радиуса 26 касается сторон AB и AD ромба $ABCD$, а окружность радиуса 12 касается первой окружности и сторон CB и CD ромба. Известно, что $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите высоту ромба.

Задача 22.7. Числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ определена соотношениями: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$ при $n \geq 3$. Докажите, что при $n \geq 2$ число $2^{n+2} - 7a_n^2$ является полным квадратом.

Задача 22.8. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Задача 22.9. Два велосипедиста стартуют одновременно из одного пункта кольцевой дороги и движутся в одном направлении с постоянными скоростями. Известно, что скорость первого в 1,12 раза больше скорости второго. На каком витке, считая от своего старта, первый велосипедист догонит второго.