

ТЕОРИЯ ГРАФОВ (ЧАСТЬ 1)

Определение 1. *Граф* — это набор точек, которые называются *вершинами графа*, и набор дуг, соединяющих эти точки, которые называются *ребрами графа*.

Определение 2. *Степенью* вершины называется количество ребер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *чётной*, если из нее выходит чётное число ребер, и *нечётной*, если из нее выходит нечётное число ребер.

19.01. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: *Земля-Меркурий*, *Плутон-Венера*, *Земля-Плутон*, *Плутон-Меркурий*, *Меркурий-Венера*, *Уран-Нептун*, *Нептун-Сатурн*, *Сатурн-Юпитер*, *Юпитер-Марс* и *Марс-Уран*. Можно ли добраться с Земли до Марса?

19.02. В пяти корзинах А, Б, В, Г и Д лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин А и Б находятся яблоки 3-го и 4-го сорта, в корзине В — 2-го и 3-го, в корзине Г — 4-го и 5-го, в корзине Д — 1-го и 5-го. Занумеруйте корзины так, чтобы в корзине №1 имелись яблоки 1-го сорта (хотя бы одно), в корзине №2 — яблоки 2-го сорта и т.д.

19.03. а) Можно ли организовать футбольный турнир девяти команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи?

б) Можно ли провести футбольный турнир восьми команд так, чтобы каждая команда провела по пять встреч?

в) А если команд семь и каждая должна провести по три встречи?

19.04. а) В фирме 50 компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соединены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по 8 кабелей. Сколько всего понадобится кабелей?

б) В графе 40 вершин, каждая степени 7. Сколько ребер в графе?

в) На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала более одного раза. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

19.05. а) Докажите замечательную теорему теории графов: Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер. (*Теорема о рукопожатиях*.)

б) Докажите, что число нечётных вершин графа всегда чётно. Доказанное утверждение позволяет сразу решить следующую задачу: каждый из людей из когда либо живших на земле сделал определенное число рукопожатий. Тогда количество людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

19.06. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно проезжая через другие города).

19.07. На школьном празднике каждый мальчик танцевал ровно с десятью девочками, а каждая девочка — ровно с девятью мальчиками. Кого было больше: мальчиков или девочек?

19.08. Можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы число, получающееся из суммы двух рядом стоящих цифр, делилось либо на пять, либо на семь, либо на тринадцать?

19.09. На столе лежат 9 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 9. Двое по очереди откладывают в сторону по одной карточке. Проигрывает тот, после хода которого сумма чисел на отложенных карточках становится больше 25. Кто выигрывает при правильной игре: начинаящий или его партнер?

19.10. Во время турнира по шахматам (по круговой системе: каждый играл с каждым ровно одну партию) двое участников, сыграв равное количество партий, заболели и выбыли из турнира, а остальные участники доиграли турнир до конца. Играли ли выбывшие участники между собой, если всего было сыграно 23 партии?

19.11. В пруд пустили 30 щук, которые ели друг друга. Щука считается *сытой*, если она съела трех щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться (Съеденная сырья щука учитывается при подсчете сытых щук)?

19.12. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не пре-восходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки ($1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.