Математический кружок МЦНМО, 7 класс. 30.10.2010.

Пятое занятие.

Задача 5.1. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

Задача 5.2. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Вани, рядом с историком. Математик сидел рядом с Колей. Соседи Артема — Петя и физик. Какая профессия у Вани?

Задача 5.3. Есть n одинаковых монет, из которых ровно одна фальшивая (легче остальных). Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь потребуется, чтобы выделить фальшивую монету, если а) n=3, б) n=9, в) n=27, г) n=3^k (k — натуральное число), д) n — произвольное натуральное число?

Задача 5.4. Придумайте 5 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Задача 5.5. На доске написаны числа 4, 5, 6. Каждую минуту написанные числа a, b и c стираются, и вместо них пишутся числа $a+b-c$, $b+c-a$ и $c+a-b$. Могли ли через некоторое время на доске появиться числа 7, 8, 9?

Задача 5.6. Камни лежат в трех кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

Задача 5.7. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились 4 осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

Задача 5.8. В поезде едут три мудреца. Поезд въезжает в туннель, и после того, как загорается свет, каждый из мудрецов видит, что лица его коллег испачканы сажей, влетевшей в окно вагона. Все трое начинают смеяться над своими попутчиками, однако вдруг самый сообразительный мудрец догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как ему это удалось?

Дополнительные задачи (Октябрь 2010)

Задача 12. Два миллионера играют в следующую игру. На столе вначале игры лежит 1000 кучек спичек по одной спичке в каждой. Игрок может за одни ход сложить любые две кучки спичек вместе, при этом противник дает ему столько рублей, сколько было спичек в большей кучке. Выигрывает тот, кто в конце игры (когда все кучки сольются в одну) получит прибыль. Кто выиграет при правильной игре и какой наибольший выигрыш он может себе обеспечить?

Задача 13. На складе стояли бочонки с медом весов 1000, 1001, ..., 2004 грамма, причем на каждом бочонке был написан его вес. На склад залетели несколько шмелей и утонули в бочонках (в одном бочонке могло утонуть несколько шмелей). Известно, что каждый шмель весит ровно 1 г. У кладовщика есть двухчашечные весы без гирь, которые показывают, на какой из чашек лежит больший вес. Как ему при помощи нескольких взвешиваний на этих весах найти какой-нибудь бочонок, в котором утонул хотя бы один шмель?

Задача 14. Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трехкопеечных монет?

Задача 15. Докажите, что существует ровно 2^n способов выбрать чётное число предметов из n+1-ого предмета.