Математический кружок МЦНМО, 7 класс. 27.11.2010.

Девятое занятие.

Задача 9.1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: "Сколько рыцарей среди твоих спутников?"Первый ответил: "Ни одного."Второй сказал: "Один."Что сказал третий?

Задача 9.2. Существуют ли такие цифры A и B, что число ABA делится на 13, а число BAB — не делится?

Задача 9.3. Какие простые числа нельзя записать в виде суммы двух составных чисел?

Задача 9.4. У крестьянина были коза, корова, кобыла, стог сена и сын. Сын подсчитал, что сена хватит козе и кобыле на месяц, кобыле и корове на 1/3 месяца, а корове и козе — на 3/4 месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Прав ли он?

Задача 9.5. На доске написано число 2. Каждый из двух игроков своим ходом прибавляет к числу один из его делителей, меньший написанного числа. Выигрывает тот, кто напишет на доске число 19891988 (писать большие числа запрещается). Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

Задача 9.6. Школьник Вася вычислил число $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100$. У полученного числа посчитал сумму цифр, у нового числа опять посчитал сумму цифр, и так далее, до тех пор, пока не получилось однозначное число. Какое однозначное число получил школьник Вася?

Задача 9.7. На окружности расставлены 20 точек. За ход разрешено соединить любые две из них отрезком, который не пересекает отрезки, проведённые ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 9.8. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов может его выпить за 1 день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. Может ли выпить это озеро один слон, и если да, то за сколько дней?

Дополнительные задачи (Ноябрь 2010)

Задача 2. Во всех клетках шахматной доски кроме клеток диагонали a1-h8 расставлено по одной шашке. Петя и Коля играют, делая ходы по очереди. Петя каждым своим ходом снимает с доски не более 14 любых шашек, а Коля выбирает любую клетку диагонали a1-h8 и ставит шашки во все пустые клетки, находящиеся с ней на одной горизонтали или вертикали (но на диагональ шашку не ставит). Может ли Петя добиться того, что после его очередного хода на доске осталось не более трех шашек?

Задача 3. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

Задача 4. Числа от 1 до 100 выписаны по порядку в вершины стоугольника. Разрешается менять местами два соседних числа, если они имеют разную четность. После нескольких таких операций оказалось, что у каждого числа тот же левый сосед, что и в самом начале, и тот же правый сосед, что и в самом начале. Докажите, что либо все числа стоят на тех же местах, что и сначала, либо каждое число сдвинулось ровно на 50 вершин.

Задача 5. Можно ли так расставить в квадрате 2004×2004 натуральные числа, чтобы сумма чисел в 1-м столбце была равна произведению чисел в 1-м столбце, сумма чисел во 2-й строке была равна произведению чисел во 2-м столбце,..., сумма чисел в 2004-й строке равна произведению чисел в 2004-м столбце?