

Четырнадцатое занятие.

Задача 14.1. На плоскости расположен квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он сообщает, по какую сторону от неё лежит невидимая нами точка (если точка принадлежит прямой, то он так и скажет). Какое наименьшее число вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли невидимая точка внутри квадрата?

Задача 14.2. Петя и Вася ехали вниз по эскалатору. На середине эскалатора хулиган Вася сорвал с Пети шапку и бросил на встречный эскалатор. Петя побежал вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься за шапкой вниз. Вася побежал вниз, чтобы затем подняться за шапкой вверх. Кто будет первым? (Скорости ребят относительно эскалатора равны и не зависят от направления движения.)

Задача 14.3. Дано число 1. За ход можно умножить имеющееся число на 2 или прибавить к нему 1. За какое наименьшее число ходов можно получить число а) 10 м; б) 100; в) 1000? Ответ обоснуйте.

Задача 14.4. Ребята стоят по кругу. Они считаются следующим образом: первый остаётся в круге, следующий за ним по часовой стрелке (второй) выходит из круга, следующий за ним (третий) остаётся, четвёртый выходит, и так далее через одного по кругу. Круг все время сужается до тех пор, пока в нём не останется один человек. Выясните, кто именно останется (на каком месте он стоял первоначально), если вначале стояло а) 16 человек; б) 17 человек; в) 64 человека; г) 2003 человека.

Задача 14.5. Имеется цепочка из n сосисок. Два кота по очереди перегрызают по одной перемычке между сосисками и съедают образовавшиеся одиночные сосиски. Выигрывает тот, кто съест больше сосисок. Может ли один из котов обеспечить себе победу, и если может, то как, если а) $n=4$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=7$; д) $n=8$;

Задача 14.6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может нарисовать такой многоугольник и точку внутри него, что ни одна из сторон многоугольника не будет видна из неё целиком. Не ошибается ли он?

Задача 14.7. На доске записано число, оканчивающееся на 01. Докажите, что можно провести черту между какими-то двумя соседними цифрами этого числа так, что количество единиц до черты будет равно количеству нулей после черты.

Задача 14.8. На листе был написан 0. Саша дописал к нему 1, потом дописал 10, потом — 1001, и так далее: каждый раз он дописывал к уже имеющейся строке цифр новую строку, получаемую из имеющейся заменой всех нулей на единицы, а единиц — на нули. Так Саша сделал 10 раз и получил длинную строку: 0110100110010110... Какая цифра стоит в этой строке на 1000-м месте?

Дополнительные задачи (Январь 2011)

Задача 1. На плоскости даны два непересекающихся круга. Существует ли вне кругов такая точка A , что любая прямая, проходящая через точку A , обязательно пересекает хотя бы один из данных кругов?

Задача 2. Лежат k пятаков, касаясь друг друга. Ещё один пятак прокатывается по их внешней стороне, касаясь их по очереди. Сколько оборотов он сделает, вернувшись в исходное положение, если а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 3$?

Задача 3. Три одинаковые банки с тремя разными красками наполнены на две трети каждая. Есть возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую (краски, оказавшиеся в одной банке, равномерно перемешиваются). Как сделать во всех банках одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)