Математический кружок МЦНМО, 7 класс. 19.02.2011.

Восемнадцатое занятие.

Задача 18.1. В школе 33 класса и 1100 учеников. Докажите, что: а) есть класс, в котором не менее 34 учеников; б) в этом классе есть 2 ученика, у которых день рождения приходится на одно и то же число (не обязательно одного месяца); в) в один из дней года отмечают день рождения не менее 4 учеников школы.

Задача 18.2. На складе 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых, причём 150 из них правые. Докажите, что из этих сапог можно составить 50 „правильных" пар.

Задача 18.3. Можно ли квадратный лист бумаги 3×3 сложить так, чтобы после одного прямолинейного разреза он распался на квадраты 1×1?

Задача 18.4. Для поправки здоровья богатырю надо отпить из молочной реки ровно 43 литра. У богатыря есть два ведра в 24 и 11 литров и огромная бочка. Сможет ли он поправить свое здоровье?

Задача 18.5. Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причём доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

Задача 18.6. Можно ли разбить прямоугольник на 9 прямоугольников так, что никакие два или более из них не образуют прямоугольника меньшего, чем исходный?

Задача 18.7. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

Задача 18.8. Имеется три кучки камней: а) 7, 8 и 9; б) произвольные. Двое по очереди берут любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень.

Дополнительные задачи (Февраль 2011)

Задача 1. На какое наибольшее количество частей могут разбить плоскость n прямых?

Задача 2. Ханойские башни. Имеются три стержня, на один из них надета пирамидка из а) двух; б) трёх; в) пяти; г) n колец различного диаметра (меньшее кольцо лежит на большем), два других — пустые. Разрешается перекладывать кольца с одного стержня на другой по одному, так чтобы большее кольцо никогда не лежало на меньшем. Как переместить всю пирамидку с исходного стержня на один из пустых?

Задача 3. Какое наименьшее количество перекладываний потребуется, чтобы переложить пирамидку с одного стержня на другой?