

Девятнадцатое занятие.

Задача 19.1. Из прямоугольников размером 1×5 клеток составили прямоугольник. Докажите, что хотя бы одна из длин его сторон кратна 5.

Задача 19.2. Чтобы доказать, что число 1601 простое, его стали последовательно делить на 2, 3 и т. д. На каком числе можно остановиться?

Задача 19.3. На доске написаны числа от 1 до 2009. За один ход Петя стирает два любых числа, вычисляет их сумму и записывает на доске последнюю цифру получившегося результата до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какое число может получиться у Пети?

Задача 19.4. В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел и в любой строке, и в любом столбце равна 1. Докажите, что $m = n$.

Задача 19.5. Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

Задача 19.6. $15! = 130*674368***$. Найдите цифры, заменённые звёздочками.

Задача 19.7. Докажите, что для любого натурального n существует n подряд идущих составных чисел.

Задача 19.8. На крайней левой клетке доски 20×1 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают её (влево или вправо) на любое число клеток, на которое её ещё не сдвигали. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Дополнительные задачи (Февраль 2011)

Задача 1. На какое наибольшее количество частей могут разбить плоскость n прямыми?

Задача 2. Ханойские башни. Имеются три стержня, на один из них надета пирамидка из а) двух; б) трёх; в) пяти; г) n колец различного диаметра (меньшее кольцо лежит на большем), два других — пустые. Разрешается перекладывать кольца с одного стержня на другой по одному, так чтобы большее кольцо никогда не лежало на меньшем. Как переместить всю пирамидку с исходного стержня на один из пустых?

Задача 3. Какое наименьшее количество перекладываний потребуется, чтобы переложить пирамидку с одного стержня на другой?

Задача 4. Вася задумал натуральное число n , выписал все его натуральные делители, кроме самого числа n , и сложил два наибольших из них. Получилось число 193. Какое число задумал Вася? (Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.)