

## Двадцать первое занятие.

**Задача 21.1.** Лифт в 100-этажном доме имеет 2 кнопки: «+7» и «-9» (первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9). Можно ли проехать: а) с первого этажа на второй; б) со второго на первый; в) с любого этажа на любой этаж?

**Задача 21.2.** Каждую сторону прямоугольника увеличили на 3 см; в результате его площадь увеличилась на 39 см<sup>2</sup>. Найдите периметр исходного прямоугольника.

**Задача 21.3.** а) Можно ли так расположить четыре шара в пространстве, чтобы каждый касался всех остальных? б) А пять шаров (не обязательно одинаковых)?

**Задача 21.4.** На прямой даны отрезок АВ и ещё 45 точек, не лежащие на этом отрезке. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки А не равна сумме расстояний от этих точек до точки В.

---

**Задача 21.5.** Путешественник выходит из своего родного города и отправляется в самый дальний от него город страны, затем — в город, самый дальний от этого города, и так далее. Расстояния между всеми городами различны. Докажите, что если путешественник не вернулся в родной город после второго перехода, то он никогда в него не вернётся.

**Задача 21.6.** Вася хочет изготовить необычную игральную кость, которая, как обычно, должна иметь форму куба, на гранях которого нарисованы точки (на разных гранях разное число точек), но при этом на любых двух соседних гранях число точек должно различаться по крайней мере на два (при этом разрешается, чтобы на некоторых гранях оказалось больше шести точек). Сколько всего точек необходимо для этого нарисовать? (Укажите минимальное количество, приведите пример их расположения на гранях и докажите, что меньшим числом обойтись нельзя.)

**Задача 21.7.** Плоскость разрезана на части  $n$  прямыми, где  $n > 3$  и не все прямые проходят через одну точку. Докажите, что хотя бы одна из частей — треугольник.

**Задача 21.8.** Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

---

## Дополнительные задачи (Март 2011)

**Задача 1.** На какое наибольшее количество частей могут разбить плоскость  $n$  прямых?

**Задача 2.** Ханойские башни. Имеются три стержня, на один из них надета пирамидка из а) двух; б) трёх; в) пяти; г)  $n$  колец различного диаметра (меньшее кольцо лежит на большем), два других — пустые. Разрешается перекладывать кольца с одного стержня на другой по одному, так чтобы большее кольцо никогда не лежало на меньшем. Как переместить всю пирамидку с исходного стержня на один из пустых?

**Задача 3.** Какое наименьшее количество перекладываний потребуется, чтобы переложить пирамидку с одного стержня на другой?

**Задача 4.** Вася задумал натуральное число  $n$ , выписал все его натуральные делители, кроме самого числа  $n$ , и сложил два наибольших из них. Получилось число 193. Какое число задумал Вася? (Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.)