

Двадцать пятое занятие.

Задача 25.1. Прямая окрашена в два цвета. Докажите, что на ней найдётся отрезок, концы и середина которого окрашены одним цветом.

Задача 25.2. Коля перемножил два натуральных числа, различающиеся на 1, а Андрей перемножил два натуральных числа, различающихся на 2. Могли ли ребята получить в итоге одно и то же число?

Задача 25.3. Через одну точку проведено четырнадцать прямых. Докажите, что угол между какими-то двумя из них меньше 13 градусов.

Задача 25.4. Докажите, что для любого целого числа x по крайней мере одно из чисел $x^3 + x$ и $x^3 - x$ делится на 10.

Задача 25.5. Сколько существует строк из 15 цифр, в которых встречаются только нули и единицы, причём никакие два нуля не стоят рядом?

Задача 25.6. У числа $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ нашли сумму цифр (его десятичной записи), получив тем самым новое число, у которого снова нашли сумму цифр, и так далее. В конце концов получилось однозначное число. Какое?

Задача 25.7. Из 12 палочек сложили четыре треугольника. Можно ли сложить из этих палочек три четырёхугольника?

Задача 25.8. Три одинаковые банки с тремя разными красками наполнены на две трети каждая. Есть возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую (краски, оказавшиеся в одной банке, равномерно перемешиваются). Как сделать во всех банках одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)

Дополнительные задачи (Апрель 2011)

Задача 1. В колоде часть карт лежит „рубашкой вниз”. Время от времени Вася вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат „рубашкой вниз”, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут „рубашкой вверх”, как бы ни действовал Вася.

Задача 2. Вася задумал натуральное число n , выписал все его натуральные делители, кроме самого числа n , и сложил два наибольших из них. Получилось число 193. Какое число задумал Вася? (Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.)