Математический кружок МЦНМО, 7 класс. 16.04.2011.

Двадцать шестое занятие.

Задача 26.1. Женя и Ваня выложили в ряд 30 коробок конфет и стали играть в такую игру. Они ходят по очереди, и каждый своим ходом может съесть содержимое любой коробки или двух коробок, лежащих рядом. Тот, кому после очередного хода противника останутся только пустые коробки, проигрывает. Первый ход делает Женя. Докажите, что он может играть так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл Ваня.

Задача 26.2. Дан прямоугольный параллелепипед размерами а) $4\times4\times4$; б) $4\times4\times3$; в) $4\times3\times3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 26.3. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки шахматной доски. Начинающий ставит крестики, его соперник — нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, где крестиков больше, чем ноликов, — это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше,— очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает.

Задача 26.4. Трое теннисистов решили поиграть на выбывание: победитель очередной партии играет следующую партию с тем, кто не участвовал в этой, а проигравший пропускает одну партию. Миша сыграл 10 партий, Вася — 15, а Саша — 17. Кто проиграл во второй партии?

Задача 26.5. На поле a1 стоит король. Двое по очереди двигают его по шахматной доске, причём ставить короля на те клетки, где он уже был, нельзя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать сможет ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 26.6. Лежат k пятаков, касаясь друг друга. Ещё один пятак прокатывается по их внешней стороне, касаясь их по очереди. Сколько оборотов он сделает, вернувшись в исходное положение, если а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 3$?

Задача 26.7. В каждой клетке доски 9×9 сидело по жуку. По сигналу каждый жук переполз в одну из соседних клеток по диагонали. При этом в каких-то клетках оказалось несколько жуков, а некоторые клетки оказались пустыми. Найдите наименьшее возможное количество пустых клеток.

Задача 26.8. Двое играют в игру на белой доске 10×10 клеток. Первый каждым ходом может закрасить черным цветом любые 4 клетки, образующие квадратик 2×2. Второй каждым ходом может закрасить чёрным цветом любые 3 клетки, образующие «уголок». Ходят по очереди, нельзя красить уже окрашенные клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может всегда выигрывать, независимо от игры другого?

Дополнительные задачи (Апрель 2011)

Задача 1. В колоде часть карт лежит „рубашкой вниз". Время от времени Вася вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат „рубашкой вниз", переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут „рубашкой вверх", как бы ни действовал Вася.

Задача 2. Вася задумал натуральное число n, выписал все его натуральные делители, кроме самого числа n, и сложил два наибольших из них. Получилось число 193. Какое число задумал Вася? (Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.)