

Кролики и клетки

Принцип Дирихле. Если в 100 клетках сидит 101 кролик, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два кролика.

5.1. а) Докажите, что в любой футбольной команде есть два игрока, которые родились в один и тот же день недели.

б) Обязательно ли найдётся день недели, в который родились ровно два игрока?

в) На матче «Спартак» — «Челси» присутствовало 73 000 болельщиков. Докажите, что хотя бы 179 из них родились в один день.

5.2. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

5.3. Даны 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

5.4. Братец Кролик написал на доске все цифры от 1 до 9 по одному разу. Могло ли так получиться, что и между единицей и двойкой, и между двойкой и тройкой, ..., и между восьмеркой и девяткой оказалось написано нечётное число цифр?

5.5. Найдётся ли среди чисел вида $111\dots 11$ число, которое делится на 57?

5.6. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено пять точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 0,5.

5.7. а) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в любом уголке из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

б) Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску, чтобы они не били друг друга?