

## СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ

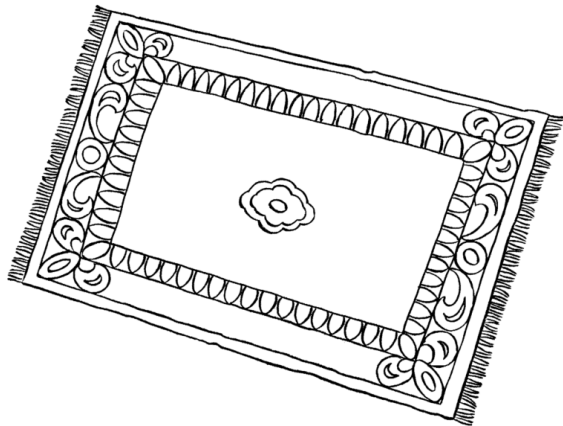
**Задача 1.** В Тридевятом царстве всего 2013 городов. В каждом есть шпион, который следит за шпионом из ближайшего города. Верно ли, что а) какие-то два шпиона следят друг за другом? б) найдется шпион, за которым никто не следит? (Попарные расстояния между городами различны.)

*Графом* называют набор *вершин*, некоторые из которых соединены *ребрами*. *Степенью* вершины называют количество выходящих из нее ребер.

**Задача 2.** Докажите, что в любом графе а) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер; б) число вершин нечетной степени четно.

**Задача 3.** В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковровлиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

**Задача 4.** Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.



## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**Задача 5.** Петр нарисовал картинку одним росчерком, а потом Василий нарисовал поверх картинку овал, который пересек некоторые линии рисунка. Докажите, что новую картинку тоже можно нарисовать одним росчерком.

**Задача 6.** В классе из 20 человек у каждого ученика не менее 14 друзей. Верно ли, что найдутся 4 ученика, которые все дружат между собой?

**Задача 7.** В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

**Задача 8.** В узлах клетчатой плоскости отметили 5 точек. У отрезков, соединяющих точки, отметили середины. Верно ли, что одна из середин тоже попадет в узел?

