

Делимость

Задача 1. Найдите НОД (наибольший общий делитель) и НОК (наименьшее общее кратное) (a) 2 и 179; (b) 57! и 3249.

Задача 2. (a) Делится ли число $2^{10} \times 5^2$ на 10? А на 1000? (b) вспомним комбинаторику: сколько делителей у этого числа? (c) Выясните, на сколько нулей оканчиваются числа $10!$ и $100!$

Задача 3. Правда ли, что среди четырех последовательных натуральных чисел обязательно хотя бы одно будет делиться на (a) 2? (b) 3? (c) на 4? (d) а на 5?

Задача 4. Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трех подряд стоящих чисел не делилась на 3.

Задача 5. (a) Известно, что $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3; (b) $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

Задача 6. Может ли сумма трех различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?

Задача 7. Ковбой Билл зашёл в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обсчитать?

Дополнительные задачи

Задача 1. Доказать, что произведение n первых простых чисел не является полным квадратом.