

Делимость и остатки

Задача 1. Число делится на 4 и на 6. Делится ли оно на 24?

Задача 2. Докажите, что произведение трех последовательных чисел делится на 6.

Задача 3. $a + 2$ делится на 5. Докажите, что $4a + 3$ делится на 5.

Задача 4. Делится ли число $11! + 12!$ на 13?

Задача 5. Найдите последнюю цифру числа 2^{50} .

Задача 6. Марго выписывала разные числа, которые делятся на 4, 5 или 9. Но потом записи перепутались. Помогите ей разобраться, что на что делится, используя минимум вычислений.

180, 56790, 36, 1324354657687980, 123456, 6665

Задача 7. Лёша написал семь чисел и заметил, что сумма любых шести из них делится на 5. Помогите Тёме доказать, что каждое из этих чисел делится на 5.

Дополнительные задачи

Задача 1. (a) Докажите, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{11}$ не целое. (b) Докажите, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ не целое.

Задача 2. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

Задача 3. Пусть $A_0 = 57!$ Обозначим через A_1 сумму цифр его десятичной записи, аналогично определим A_2, A_3 и т.д. Докажите, что начиная с некоторого i все члены последовательность A_n равны и найдите чему.