Принцип Дирихле

Задача 0. Пусть m кроликов сидят в n клетках. Тогда найдется клетка, в которой сидит не менее $[\frac{m}{n}]$ кроликов. (Это утверждение про кроликов традиционно называют *принципом Дирихле.*)

Задача 1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

Задача 2. Какое наибольшее число клеток можно закрасить на шахматной доске так, чтобы ни один уголок не был бы закрашен полностью?

Задача 3. Докажите, что из любых 2013 целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на 2012.

Задача 4. Тридцать команд участвуют в первенстве по футболу. Каждые две команды должны сыграть между собою один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

Задача 5. Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.

Задача 6. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

Дополнительные задачи

Задача 1. Найдется ли среди чисел вида 111..11 число, которое делится на 57?

Задача 2. Плоскость раскрашена в два цвета, причем каждый цвет использован.
(a) Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 11 м.
(b) Докажите, что найдутся две точки разных цветов, расстояние между которыми равно 57 м.