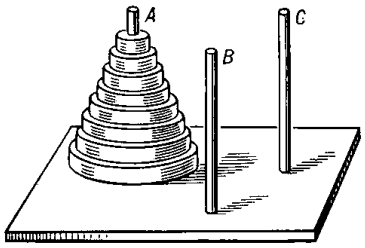
Индукция II



Головоломка “Ханойская башня”

Головоломка “Ханойская башня” представляет собой несколько дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню с колышка A на колышек C, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

Задача 1. Придумайте решение для Ханойской башни из **(a)** трех колец; **(b)** 6 колец.

Задача 2. Докажите, что для любого числа колец решение существует.

Утверждение: Всех школьников зовут одинаково.

Доказательство (по индукции):

База: При $n = 1$: Для множества, состоящего из одного школьника, утверждение, очевидно, выполнено.

Шаг: Пусть для любого множества из k школьников верно, что всех их зовут одинаково. Тогда возьмем какое-то множество из $k + 1$ школьника. Если убрать из него одного школьника, то их останется k. По предположению индукции, у них одинаковые имена. Теперь вернем на место забранного школьника и уберем какого-нибудь другого. Школьников снова k, т.е. всех зовут одинаково по предположению индукции. Но тогда и всех $k + 1$ школьников зовут одинаково.

Утверждение доказано.

Задача 3. Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки” из трёх клеток;

Задача 4. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. **(a)** Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ – также целое при любом целом n. **(b)** Приведите пример таких x, не равных ± 1.

Задача 5. Докажите тождество: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Задача 6. Докажите, что для любого натурального n: **(a)** $n^3 + 5n$ делится на 6; **(b)** $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Задача 7. Докажите, что число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n.