Занятие 25.

Определение. Графом называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а соединяющие линии - *ребрами.*

Пример 1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон-Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Пример 2. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и 2 черных. Можно ли за несколько ходов поставить коней так, чтобы в соседних углах стояли кони разного цвета?

Пример 3. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.

Определение. Вершину называют *четной*, если из нее выходит четное число ребер, и *нечетной* в противном случае. Граф называется *связным*, если между любыми двумя вершинами существует путь, состоящий из ребер графа. Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром.

Задача 1. Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися линиями так, чтобы из каждой точки выходили четыре линии.

Задача 2. а) Сколько ребер в полном графе с n вершинами? б) Сколько диагоналей в n-угольнике?

Задача 3. Из доски 4×4 вырезаны все угловые клетки. Может ли шахматный конь обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав в каждой клетке ровно один раз?

Задача 4. Пять вершин куба покрашены в красный цвет. Верно ли, что обязательно найдутся три ребра, у которых оба конца красные?

Задача 5. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Задача 6. В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Из-за сокращения штата сотрудников придется закрыть одну из станций. Докажите, что ее можно выбрать таким образом, что между любыми двумя оставшимися станциями проезд будет возможен.

Математический кружок МЦНМО. 7 класс. 19 апреля 2014

Занятие 25. Домашнее задание.

Задача 1. Нарисуйте 4 вертикальных и 4 горизонтальных отрезка, каждый из которых пересекает три отрезка другого направления.

Задача 2. В классе 24 человека. Из них все, кроме Васи, дружат ровно с 5 одноклассниками. Может ли Вася ни с кем не дружить?

Задача 3. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзей?

Задача 4. В шахматном турнире участвовали 15 человек: 7 девочек и 8 мальчиков. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно один матч. Сколько побед в сумме одержали мальчики, если они выиграли ровно половину всех матчей против девочек (ничьих в партиях не было)?

Задача 5. На математической олимпиаде было предложено 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил по две задачи, причем выяснилось, что среди пришедших каждую задачу решило ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и все задачи были разобраны.