

Занятие 26.

Определение. Степенью вершины в графе называется количество выходящих из нее ребер.

Пример 1. В графе количество вершин с нечетной степенью четно.

Определение. Граф называется *плоским*, если он нарисован на плоскости и его ребра могут пересекаться только в вершинах графа. Тогда части, на которые он делит плоскость, называются его *гранями*.

Пример 2. При каких n бывают плоские полные графы на n вершинах?

Определение. *Правильным обходом* связного графа называется путь, который проходит через все ребра графа по одному разу.

Указание. В некоторых задачах удобно использовать метод математической индукции.

Задача 0. а) Для связного графа, у которого более двух нечетных вершин, не существует правильного обхода. б)* Для связного графа, у которого все вершины четные, существует правильный обход, начинающийся в любой вершине и в ней же заканчивающийся. в)* Для связного графа с двумя нечетными вершинами существует путь, начинающийся в одной из них и заканчивающийся в другой.

Задача 1. Существует ли граф с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2?

Задача 2. Существует ли граф с $2n$ вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, ..., n , n ?

Задача 3. В марсианском спортклубе тренируются 100 толстяков, веса которых равны 1кг, 2кг, ..., 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить, чтобы ни в какой команде не было двух толстяков, один из которых вдвое тяжелее другого?

Задача 4. Последовательность из 36 цифр, среди которых встречаются только нули и единицы, начинается с пяти нулей. Среди пятерок подряд идущих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр.

Задача 5. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

Задача 6*. а) Докажите, что в плоском графе найдется вершина, из которой выходит не более 5 ребер. б) Докажите, что вершины плоского графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины соединенные ребром, имели разный цвет.

Внимание! Следующих двух занятий не будет. Ближайшее занятие состоится 17 мая.