Оглавление

Введение

Зачем эта книга?

Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель (точнее, решатель) освоит основы важных теорий — как классических, так и современных. Ср. [S4], [ZSS], [J]. Книга будет полезна руководителям и участникам кружков для старшеклассников и младшекурсников (в частности, ориентированных на олимпиады). Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

Решение этих задач (т. е. изучение соответствующих теорий) будет полезно также всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий Московского Физико-Технического Института. Приведенные задачи используются при изучении курсов дискретных структур и дискретного анализа на этом факультете. Эти курсы читают А.Б. Дайняк и А.М. Райгородский, а остальные авторы ведут семинары по этим курсам. Некоторые материалы основаны на занятиях, проведенных А.Б. Скопенковым в Кировской летней математической школе (до 2016), Московской выездной олимпиадной школе (с 2004), а также на кружках «Математический семинар» (1994-2013) и «Олимпиады и математика» (с 2003, в школе «Интеллектуал» с 2015).

Комбинаторика — один из самых красивых разделов современной математики. Постановки задач этого раздела зачастую доступны школьникам. А результаты, тем не менее, носят фундаментальный характер и важны как для развития других разделов математики, так и для приложений в информатике, биологии, экономике и др. Мы постараемся рассказать о тех мощных современных методах, благодаря которым кристаллизуется серьезная научная дисциплина — комбинаторика. Среди этих методов, помимо более или менее стандартных, вероятностный и линейно-алгебраический методы. Они лежат в основе самых продвинутых комбинаторных результатов, полученных за последние десятилетия.

Параграфы второй половины книги дают экскурс в активно развивающиеся области математики. Хотя здесь изучаются только самые простые результаты и методы, они дают некоторое представление об основных направлениях научных исследований в соответствующих областях. Этому посвящены *замечания*, которые не используются ни в формулировках, ни в решениях задач. Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие».

Используемый материал.

Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой; [1] мы приводим все определения, не так часто изучаемые на кружках. Без определения используются только простейшие определения и результаты теории чисел [O, §8-§9], [Vi, §§1-3], [ZSS, §§2.1-2.6, 3.1 и 3.3]. Если в некотором разделе для понимания условий или для решения задач нужны дополнительные сведения (или консультация специалиста), то в начале соответствующего раздела приводятся ссылки.

При этом многие задачи трудны: для их решения нужно предварительно прорешать другие приведенные задачи на данную тему.

Как устроена книга.

Эту книгу не обязательно читать (точнее, прорешивать) подряд. Параграфы и разделы книги практически независимы друг от друга (кроме разделов в §3 и §4, которые желательно прорешивать подряд). Если в задаче одного из разделов все-таки используется материал другого раздела, то либо эту задачу можно игнорировать, либо посмотреть конеретно указанный материал другого раздела. Основные обозначения приведены в конце введения. Основные понятия и обозначения теории графов введены в §2.1.

При этом параграфы расположены примерно в порядке возрастания сложности материала.

---

[1] Часть материала (например, §1.1) на некоторых кружках и летних школах изучается даже 6-классниками. Однако приводимые подсказки, указания и решения рассчитаны на читателей с некоторой математической культурой (необходимой для освоения бо́льшей части книги). Разбирать эти решения с 6-классниками нужно по-другому, см., например, [GIF].

К важнейшим задачам приводятся подсказки, указания и решения. Подсказки и указания расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Общие замечания к формулировкам задач.

Задачи обозначаются жирными цифрами. Если в условии задачи написано «найдите», то нужно дать ответ без знака суммы и многоточия. Если же условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством.* [2] В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда школьник или студент немного подумал над самой задачей.)

Большинство задач не оригинальны, но установить первоисточник не представляется возможным. Многие задачи взяты из [IKRS], [ZSS], [L] и из неопубликованных материалов кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ.

О литературе.

В список литературы не вошли многие хорошие *стандартные учебники* по комбинаторике и теории графов (ввиду необъятности их количества). Мы цитировали те из них, которые по тем или иным причинам чаще используем в преподавании. Мы цитировали всю известную нам *более продвинутую* учебно-научную литературу. Но этот список тоже не претендует на полноту, поскольку мы можем не знать о некоторых публикациях.

В списке литературы [Ga, GKP, Har, Hal, K, M, R1, R2, R3, R4, S1, S2, VS, 8] и [AM, I, Ja, J, KZP, KR, O, P, Vi, R5, R6, S3, S5] — базовые учебники и статьи по темам этой книги и по связанным темам, [AS, B, Bo, G, L, S7, So] — более продвинутая литература.

---

[2] Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

Основные обозначения

• $[x]$ — (нижняя) целая часть числа x.

• $d \mid n$ — число n делится на число d (для целых d и n).

• $\mathcal{R}_n$ — множество $\{1, 2, \dots, n\}$.

• $\mathbb{N}$ — множество $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ целых положительных чисел.

• $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ — множества всех действительных, рациональных и целых чисел, соответственно.

• $\mathbb{Z}_2$ — множество $\{0, 1\}$ остатков от деления на 2 с операциями сложения и умножения по модулю 2.

• $\mathbb{Z}_m$ — множество $\{0, 1, \dots, m-1\}$ остатков от деления на m с операциями сложения и умножения по модулю m.

• $\binom{n}{k}$ — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества (другое обозначение: C_n^k).

• $\binom{X}{k}$ — множество всех k-элементных подмножеств множества X.

• $|X|$ — число элементов во множестве X.

• $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ — разность множеств A и B (не путайте этот знак с $/$).

• $A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение множеств A и B. Оно равно $A \cup B$, если $A \cap B = \varnothing$.

• $A \subset B$ — «множество A содержится в множестве B». (В некоторых других книгах это обозначают $A \subseteq B$, а $A \subset B$ означает «множество A содержится в множестве B и не равно B».)

• фраза ‘обозначим $x = a$’ сокращается до $x := a$.

1 Элементы комбинаторики

1.1 Подсчёт и комбинаторные тождества

1.1.1. (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (b) Найдите сумму $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$.

1.1.2. (a) *Правило Паскаля.* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Подсказка приведена после задачи 1.1.4.a.)
(b) $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}$. Здесь $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — количество разбиений n-элементного множества на k частей (т. е. непустых подмножеств); разбиения считаются неупорядоченными, т. е. разбиение множества $\{1, 2, 3\}$ на части $\{1, 2\}$ и $\{3\}$ и разбиение того же множества на части $\{3\}$ и $\{1, 2\}$ считаются одинаковыми. Ср. с задачей 1.4.7.e.

Замечание. Числа $\left\{ {n \atop k} \right\}$ называются *числами Стирлинга второго рода*; подробнее о них см., например, [GKP, с. 287].

1.1.3. (a) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?
(b) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

1.1.4. (a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.
(b) *Бином Ньютона.* $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

Как решать задачи этого раздела? Мы предлагаем три метода, которые продемонстрируем на примере трех доказательств правила Паскаля 1.1.2.a. (Большинство задач этого раздела решаются несколькими методами из трех предложенных Но, конечно, не каждый метод применим к каждой задаче. Обычно в указаниях для краткости приводится только один способ решения.)

Первое доказательство: комбинаторные рассуждения. Неформально говоря, идея в следующем: чтобы выбрать $k+1$ футболистов, нужно либо выбрать $k+1$ полевых, либо вратаря и k полевых. Приведем строгое изложение этой идеи.

и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему.

Замечание. Понятно, что при данном числе k специалистов (в задаче 1.5.7 $k = 8$) для малого числа видов работ так распределить выходные всегда можно. А при большом числе l видов работ это может уже не получиться. В следующей задаче мы находим асимптотическую оценку снизу для такого числа l.

Вот более ученая формулировка (обобщения) задачи 1.5.7. Имеется $l = 2^{k-1}$ подмножеств некоторого множества, в каждом из которых ровно k элементов. Тогда элементы этого множества можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакое из l подмножеств не было одноцветно. Ср. с задачей 6.2.1.a.

1.5.8. (a) Если для некоторого чётного n

$$\left(1 - 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^l 2^n < 1,$$

то в n-элементном множестве Найдётся l таких k-элементных подмножеств, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета хотя бы одно из этих l подмножеств одноцветно.
(b) Существует такое $c > 0$, что для любого k существует не более чем $ck^2 2^k$ таких k-элементных подмножеств некоторого множества, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета одно из этих подмножеств одноцветно.

1.6 Комбинаторные покрытия. А.Я. Канель

Данная подборка посвящена прежде всего использованию покрытий как метода решения. В большинстве случаев рассматриваются *связи* между объектами и эти связи покрываются.

IMO-2001,3. 21 девочка и 21 мальчик участвовали в олимпиаде. Оказалось, что

каждый участник решил не более 6 задач;

для любых мальчика и девочки найдется задача, которую они оба решили.

Докажите, что некоторую задачу решило не менее трех мальчиков и не менее трех девочек.

IMO-2005, 6. На математической олимпиаде участникам было предложено 6 задач. Оказалось, что каждая пара задач была решена более чем $2/5$ от общего числа участников, но никто не решил все 6 задач. Докажите, что найдутся по крайней мере два участника, каждый из которых решил ровно 5 задач.

IMO-2002, 6. Пусть $n \geqslant 3$ и $C_1, \ldots, C_n$ — круги единичного радиуса такие, что любая прямая пересекает не более трех из них. Докажите, что $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \dfrac{1}{|O_iO_j|} \leqslant \dfrac{(n-1)\pi}{4}$.

2003, 1. Пусть A есть 100-элементное подмножество множества $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$. Докажите, что для некоторых натуральных $\{t_1, \ldots, t_{100}\} \subseteq S$ множества $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$, $j = 1, \ldots, 100$, попарно не пересекаются.

2006, 2. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам многоугольника P, не меньше удвоенной площади многоугольника P.

Указания и решения

1.6.IMO-2001.3. Каждая задача рассматривается как "связь" между мальчиками и девочками. Свяжем с ней пару (a, b), где a — число решивших мальчиков, а b — девочек. Если заключение нашей задачи не выполнено, то для каждой задачи либо $a \leqslant 2$, либо $b \leqslant 2$. Рассматриваемая задача покрывает $a \times b$ пар мальчик—девочка (всего пар 21^2). Кроме того, $\sum a_i \leqslant 6 \cdot 21$ и $\sum b_i \leqslant 6 \cdot 21$. Решение задачи завершается подсчетом.

Похожим образом решается **??.IMO-2005.6.**

1.6.IMO-2002.6. Рассмотрите *фазовое пространство* прямых. С использованием идеи фазового пространства рекомендуем познакомиться по решению задачи 4.6 (об альпинистах), опубликованном в N6 Математического Просвещения, стр. 150-151, или по книге *В. И. Арнольд, "Обыкновенные дифференциальные уравнения"*, 1.1.2, где разбирается задача Н. Н. Константинова о возах.

1.6.2003.1. Последовательность $\{t_j\}$ строится поэтапно, возможность построения осуществляется исходя из соображения покры-

2 Основы теории графов

2.1 Основные определения

Графом $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары несовпадающих элементов) которого выделены. Множество выделенных подмножеств обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \binom{V}{2}$.

Элементы данного множества V называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *рёбрами*. Хотя эти пары неупорядоченные, в теории графов их традиционно обозначают круглыми скобками. Вершина, принадлежащая ребру, называется *его вершиной*. Если вершины a и b соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, а само ребро (a, b) называется *проходящим* через вершину a и вершину b или *инцидентным* вершине a и вершине b.

Общепринятый термин для понятия графа, данного здесь — *граф без петель и кратных рёбер* или *простой граф*.

Если не оговорено противное, то через n и e обозначаются количества вершин и рёбер рассматриваемого графа, соответственно.

Граф можно представлять себе как набор точек (например, на плоскости), некоторые пары которых соединены ломаными. См. рис. 3, 4, 5, 8, 9, 11 и 12 ниже. При этом только концы каждой ломаной являются вершинами графа и каждая пара вершин не соединена более чем одной ломаной. Точки называются *вершинами* графа, а ломаные — *рёбрами*. Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения «не считаются», т.е. не являются вершинами.

Путем P_n называется граф с вершинами $1, 2, \dots, n$ и ребрами $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. *Циклом* C_n называется граф с вершинами $1, 2, \dots, n$ и ребрами $(1, n)$ и $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. (Не путайте эти графы с *путем в графе* и *циклом в графе*, определенными ниже.) Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n. Если вершины графа можно разделить на две части так, что нет рёбер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями.* Через $K_{m,n}$ обозначается двудольный граф с долями из m и из n вершин, в котором имеются все mn рёбер между вершинами разных долей.

2.1.1. В любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины рёбер графа.

Степенью $\deg v$ вершины v графа называется число выходящих из нее рёбер. *Изолированной вершиной* называется вершина, из которой не выходит ни одного ребра.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H, если каждая вершина графа G является вершиной графа H, и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины графа G, соединённые ребром в графе H, не обязательно соединены ребром в графе G.

k-кликой в графе называется его подграф с k вершинами, являющийся полным. *Независимым множеством* или *антикликой* в графе называется набор его вершин, между которыми нет рёбер.

Путем в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_n$, в которой для любого i ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}. Число $n-1$ называется *длиной* пути. (Ребра $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ не обязательно попарно различны.)

Циклом в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_ne_n$, в которой для любого $i<n$ ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}, а ребро e_n соединяет вершины v_n и v_1. Циклы считаются одинаковыми, если они отличаются циклическим сдвигом последовательности. Число n называется *длиной* цикла. *Несамопересекающимся* называется цикл, для которого вершины $v_1, v_2, \dots, v_n$ попарно различны и рёбра $e_1, e_2, \dots, e_n$ попарно различны. Стандартный термин (менее удобный для начинающего) — *простой* цикл.

2.1.2. (a) Любой цикл, не проходящий ни по одному ребру дважды, содержит несамопересекающийся цикл.

(b) Любой цикл нечётной длины содержит несамопересекающийся цикл обход нечётной длины.

(c) Справедливо ли аналогичное утверждение для циклов чётной длины, не проходящих ни по одному ребру дважды?

(d) В графе есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и b, а также есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра b и c. Тогда есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и c.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём, и *несвязным* иначе.

2.1.3. Если степень каждой из n вершин графа больше $\frac{n}{2} - 1$, то граф связен.

Ясно, что «соединённость некоторым путём» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. *Связной компонентой* графа называется любой класс этой эквивалентности.

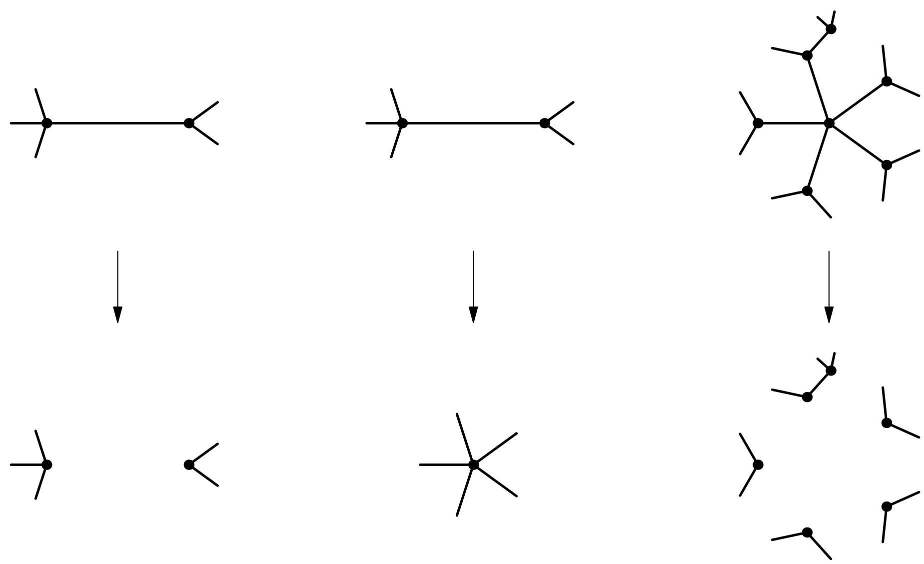

Рис. 2: Удаление ребра $G - e$, стягивание ребра G/e и удаление вершины $G - x$

Определение операций удаления ребра и удаления вершины ясно из рис. 2. Операция *стягивания ребра* (рис. 2) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины A и B этого ребра на одну вершину D, а все рёбра, выходящие из вершин A и B в некоторые вершины, заменяет на рёбра, выходящие из вершины D в те же вершины. (Эта операция отличается от стягивания ребра в мультиграфах, см. §2.5, тем, что каждое получившееся ребра кратности больше 1 заменяется на ребро кратности 1.) Например, если граф — цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится цикл с тремя вершинами.

Ориентированным графом (без петель и кратных рёбер) $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые *упорядоченные* пары несовпадающих элементов которого выделены. Множество выделенных пар обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$. Если выделены и пара (a, b), и пара (b, a), то это ребро не называется кратным.

Ориентированный путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет ориентированное ребро из предыдущей.

2.1.4. Пусть дан ориентированный граф G, у которого на каждом ребре u написан вес $f(u)$. (Этот вес можно понимать как работу, которую нужно затратить для того, чтобы пройти по ребру от начала до конца.) Функция $p : V(G) \to \mathbb{R}$ («потенциал») такая, что $f(x, y) = p(x) - p(y)$ для любого ребра $u = (x, y)$, существует тогда и только тогда, когда сумма весов рёбер любого ориентированного цикла равна нулю (при прохождении ребра по циклу в направлении, противоположном ориентации, вес в сумму берётся с отрицательным знаком).

Турниром называется ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ребром. (Т.е. для любых двух вершин v, w турнира среди его ребер есть (v, w) или (w, v), но не оба ребра сразу.)

Некоторые другие определения приведены в начале каждого раздела.

2.2 Перечисление деревьев

Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов. *Остовом графа* называется любой его подграф, являющийся деревом и содержащий все вершины графа.

2.2.1. (a) В любом дереве найдется *лист*, т.е. вершина степени 1.

(b) В любом дереве с n вершинами $n - 1$ ребро.

(b) *Теорема Менгера (вершинная).* Если вершины a и b мультиграфа G, не соединённые ребром, остаются в одной компоненте связности после удаления любых $k-1$ других вершин, то a и b можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.

2.8.6. Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих промежуточных вершин. Тогда любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.

2.9 Метод минимального контрпримера. А. Канель

При решении многих задач используется так называемый *метод минимального контрпримера* (разновидность *принципа крайнего* или *метода спуска*). Он заключается в следующем. Пусть надо доказать, что объекта, удовлетворяющего некоторым свойствам, не существует. Предположим противное — тогда найдется (в некотором смысле) *минимальный* контрпример. После чего строят еще «меньший» контрпример и получают противоречие. Понятие «меньше» подбирается в процессе доказательства.

Особенно распространен такой метод решения в задачах на графы. Простейшие примеры — доказательства теорем Эйлера 2.4.2 о плоских графах [P], Куратовского (п. 2.4 и [S1]) и Менгера (п. 2.8 и [S12]). Более содержательный пример — следующая знаменитая теорема Дилуорса о частично упорядоченных множествах.

2.9.1. Множество A с отношением $\prec$ называется *частично упорядоченным*, если отношение $\prec$ удовлетворяет следующим свойствам:

(1) $a \not\prec a$,

(2) $a \not\prec b$ либо $b \not\prec a$, и

(3) если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$.

Если $a \prec b$ или $b \prec a$, то элементы a и b называются *сравнимыми*. Если же $a \not\prec b$ и $b \not\prec a$, то они называются *несравнимыми*. *Цепью* называется множество попарно сравнимых элементов, а *ан-*

тицепью — попарно несравнимых. *Диаметром* частично упорядоченного множества называется максимальный размер антицепи.

(a) Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

(b) *Теорема Дилуорса.* Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, равно его диаметру.

2.9.2. (Задача зонального этапа Всероссийской олимпиады 1994 г.) В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа КСБ и КБС. Докажите, что разность количеств городов разных типов делится на 4.

2.9.3. (a) (IMO, 2004, Shortlist) С графом разрешается производить следующую операцию: выбрать произвольный цикл длины 4 и выбросить из него произвольное ребро. Какое минимальное число ребер можно оставить с помощью этой операции из полного графа с n вершинами?

(b) (IMO, 2001, Shortlist) Если в графе любые две 3-клики имеют общую вершину и нет 5-клик, то существуют две вершины, удаление которых разрушает все 3-клики.

2.9.4. (IMO, 1992, Longlist) Для любых $m < n$ любой граф с n вершинами содержит подмножество из $m+1$, вершины степени которых отличаются не больше чем на $m-1$.

2.10 Степенны́е последовательности. В.А. Волков, М.Н. Вялый и А.Б. Скопенков

2.10.1. (a) При каких e и n существует граф с n вершинами и e ребрами, каждая вершина которого имеет степень 3? (Такие графы называют *кубичными* или *правильными степени 3*.)

(b) При каких n и d существует граф с n вершинами, каждая вершина которого имеет степень d?

2.10.2. Последовательность n целых положительных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма её членов равна $2n-2$.

2.10.3. Даны целые положительные числа $n, d_1, \ldots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)

(b) мультиграф без петель

(c)* граф

с n вершинами степеней $d_1, \ldots, d_n$, соответственно?

Последовательность целых неотрицательных чисел называется *степенной* (графической), если она является последовательностью степеней вершин некоторого графа. *Основной вопрос*: какие последовательности являются степенными? Ср. с задачей 2.10.3.c; неотрицательность введена для удобства индуктивных построений.

2.10.4. Является ли степенной последовательность

(a) $(4^3, 1^6)$, (b) $(6^4, 2^3)$, (c) $(5^3, 3^3)$,

(d) $(18^{10}, 12^3, 6^8)$, (e) $(15^8, 10^6, 3^4)$?

(Мы используем «экспоненциальную» запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.)

2.10.5. Для любой степенной последовательности $d_1, \ldots, d_n$

(a) $d_i \leqslant n - 1$;

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

2.10.6. (a) Приведите пример числа n и не степенной последовательности из n чисел, лежащих в промежутке $[1000, n/1000]$, сумма которых четна.

(b) Любая последовательность из n чисел, меньших $\sqrt{n}/2$, сумма которых четна — степенная.

2.10.7. Последовательность целых положительных чисел — степенная тогда и только тогда, когда последовательность, полученная из нее следующим преобразованием — степенная.

(a) Выкинем максимальное число d и отнимем по единице от следующих по возрастанию d чисел.

(b) Отнимем по единице от наибольшего и наименьшего из чисел.

Каждый из двух пунктов этой задачи дает алгоритм распознавания того, является ли данная последовательность степенной. Имеется и «явный» ответ, см. подсказку к задаче 2.10.3.c.

2.10.8. Пусть a, b, c, d — различные вершины графа, причем (ab), (cd) — ребра, а $(ac), (bd)$ — не ребра. Назовем *обменом* преобразование графа, состоящее в удалении ребер $(ab), (cd)$ и добавлении ребер $(ac), (bd)$.

Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми (упорядоченными по неубыванию) последовательностями степеней вершин. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

2.10.9. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.10.5.b.

(a) Тогда $d_1 \leqslant n-1$.

(b) Переставим по невозрастанию последовательность, полученную преобразованием из задачи 2.10.7.a. Докажите неравенства из задачи 2.10.5.b с заменой d на полученную последовательность c:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} \text{ для любого } k = 1, \ldots, n-1.$$

Сделайте это для

(b1) $k \geqslant d_1$; (b2) таких k, что $c_i = d_{i+1} - 1$ при любом $i \leqslant k$;

(b3) остальных случаев.

2.10.10. Пусть для последовательности $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$ (не обязательно степенной) выполнены неравенства из задачи 2.10.5.b. Переставим по невозрастанию последовательность, полученную преобразованием из задачи 2.10.7.b. Докажите неравенства из задачи 2.10.5.b с заменой d на полученную последовательность c при

(a) $k \geqslant t := \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$; (b) $d_k \leqslant k-1 \leqslant t-2$;

(c) $d_k = k \leqslant t-1$; (d) $d_k \geqslant k+1 \leqslant t$.

В заключение приведем несколько задач для исследования.

2.10.11. (a,b,c) То же, что в задаче 2.10.3, для *связных* графов.

(a',b',c') Сформулируйте и решите аналог задачи 2.10.3 для *ориентируемых* графов.

(a”,b”,c”) То же, что в задаче 2.10.3 для *планарных* графов.

(a”’,b”’,c”’*) То же, что в задаче 2.10.3, для графов, реализуемых на торе (рис. 7).

(a””,b””,c””*) То же, что в задаче 2.10.3, для графов, реализуемых на ленте Мебиуса (рис. 7).

Необходимые определения можно найти в п. 2.4. Для тора и ленты Мебиуса будет полезно неравенство Эйлера [Sk15, §2].

Задачи 2.10.11.(a”,b”,c”) при помощи конструкции *двойственного* графа связаны со следующими задачами. Даны целые положительные числа $n, d_1, \ldots, d_n$. При каких условиях существует

(a) мультиграф (возможно, имеющий петли и кратные ребра)

(b) мультиграф без петель

(c)* граф

нарисованный без самопересечений на плоскости, имеющий n граней, в границе которых $d_1, \ldots, d_n$ ребер, соответственно?

Аналогичное замечание справедливо для реализуемости на торе и на ленте Мебиуса. Все эти задачи интересно обобщить на сферу с g ручками и на диск с m листами Мебиуса [Sk15, §2].

2.10.12. * (a) Можно ли опустить какие-нибудь неравенства из задачи 2.10.5.b так, чтобы достаточность (т.е. теорема из подсказки к задаче 2.10.3.c) осталась верной? Если да, то попробуйте найти минимальный набор неравенств.

(b) Если слить две степенные последовательности, то получится степенная последовательность. А какие степенные последовательности нельзя разбить на две степенные последовательности?

2.11 Гамильтоновость: задачи для исследования. А.Ю. Веснин, Д.А. Пермяков, А.Б. Скопенков

Пусть H — граф. Граф X называется *H-гамильтоновым,* если в X существует подграф, содержащий все вершины графа X и гомеоморфный графу H.

Например, гамильтоновость равносильна K_3-гамильтоновости.

Следующая задача (кроме (g)) проста и приводится для того, чтобы помочь решателю войти в курс дела. Задачи, отмеченные звездочкой, являются нерешенными. Обычно при решении сложной задачи полезно рассмотреть частные случаи, попытаться решить близкие задачи. Это позволяет заметить закономерности, которые можно сформулировать в виде гипотез и затем доказать. Мы не будем подсказывать эти гипотезы, а предлагаем вам самим исследовать нерешенные задачи и высказывать ваши предположения.

Обозначим $\theta := K_{3,2}$.

2.11.1. (a) Любой гамильтонов граф, отличный от цикла, является θ-гамильтоновым.

(b) Существует θ-гамильтонов граф, не являющийся гамильтоновым.

(c) Существует ли гамильтонов граф, отличный от цикла, не гомеоморфный графу θ и не являющийся K_4-гамильтоновым?

(d) Существует ли K_4-гамильтонов граф, не являющийся θ-гамильтоновым?

(e) Для любого ли графа G существует граф, не являющийся G-гамильтоновым?

(f) Для любых ли графов G и H существует G-гамильтонов граф, не являющийся H-гамильтоновым?

(g)* Опишите «иерархию» графов по их гамильтоновости: когда H-гамильтонов граф является G-гамильтоновым?

2.11.2. (a) Постройте не гамильтонов граф многогранника.

(b,c*,d*,e*,f*,g*) То же, что в задаче 2.11.1, для графов многогранников.

Граф Погорелова — граф выпуклого многогранника в трехмерном пространстве,

(1) из каждой вершины которого исходит три ребра,

(2) каждая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на поверхности многогранника, разделяющая какие-либо две его грани, пересекает по крайней мере пять ребер многогранника.

Из (2) вытекает, что в границе каждой грани не менее пяти ребер.

2.11.3. (a) Правильный додекаэдр является графом Погорелова.

(b) Граф с рис. 9 является графом Погорелова.

(c)* Охарактеризуйте графы Погорелова в теоретико-графских терминах (подобно характеризации Штейница графов многогранников).

Негамильтонов граф Погорелова с рис. 9 является θ-гамильтоновым (задача 2.11.2.b).

2.11.4. (c*,d*,e*,f*,g*) То же, что в задаче 2.11.1, для графов Погорелова.

2.11.5. * Постройте минимальный (по числу граней) граф Погорелова,

(a) являющийся K_4-гамильтоновым, но не θ-гамильтоновым.

(b) не являющийся K_4-гамильтоновым.

(c) не являющийся H-гамильтоновыми ни для какого подграфа H данного графа G. (Например, для $G = K_4$.)

См. подробнее [Ve].

Ориентированный граф называется *сильносвязным*, если от любой его вершины можно добраться до любой другой, двигаясь по направлению стрелок на ребрах.

2.11.6. (a) Турнир сильносвязен тогда и только тогда, когда в нем есть гамильтонов ориентированный цикл (т.е. несамопересекающийся цикл, идущий по направлениям стрелок на ребрах и проходящий по всем вершинам).

(b) В сильносвязном турнире через любую вершину проходит несамопересекающийся ориентированный цикл любой длины от трех до количества вершин турнира.

2.11.7. * Найдите наименьшее количество несамопересекающихся циклов длины k в сильносвязном турнире с n вершинами.

2.12 Подсказки

2.1.1. Обозначим данный граф через G. Посчитайте двумя способами количество таких пар (A, x), что $A \subset V(G)$, $x \in E(G)$ и ровно один конец ребра x лежит в A.

2.10.5. (b) Оцените сверху количество ребер, выходящих из первых k вершин (и снизу количество ребер, выходящих из последних $n-k$ вершин).

2.10.7. Используйте обмены (определенные в задаче 2.10.8).

(b) Удалим ребро между вершиной наибольшей степени и вершиной наименьшей степени, если это возможно.

2.10.8. *Первый способ.* Рассмотрите вершину наибольшей степени и ребра (в графах G_1 и G_2), выходящие из нее.

Второй способ. Рассмотрим граф с теми же вершинами. Его красные ребра — те, которые есть в G_1, но не в G_2. Его синие ребра — те, которые есть в G_2, но не в G_1. Докажите, что в нем есть цветочередующийся цикл.

2.10.11. (a',b',c') См., например, [Ru].

(a",b",c") Используйте формулу Эйлера 2.4.2.

(a",b"), (a"' ,b"'), (a"", b"") Следующие ответы для сферы с g ручками (или диска с m листами Мебиуса) получены в [Mo]. Здесь g, m даны вместе с n и $d_1, \dots, d_n$.

(a) e целое и $e \geqslant n-1+2g$ (или $e \geqslant n-1+m$).

(b) e целое, $e \geqslant \max d_i$ и $e \geqslant n-1+2g$ (или $e \geqslant n-1+m$).

2.11.2. (a) См. рис. 9.

2.13 Указания

2.1.1. См. подсказку. Для каждого ребра x найдётся ровно $2 \cdot 2^{n-2}$ таких пар. Всего 2^n подмножеств $A \subset V(G)$. Значит, какому-то из подмножеств отвечает не менее $e/2$ пар. Это подмножество — первая доля, его дополнение — вторая.

Это комбинаторное решение можно записать на вероятностном языке следующим образом. Рассмотрим случайное подмножество A множества $V(G)$ вершин графа (каждый элемент берём с вероятностью, равной одной второй). Тогда каждое ребро с вероятностью $1/2$ соединяет вершину из A с вершиной из $V(G) \setminus A$. Взяв мат. ожидание числа рёбер между этими двумя подмножествами, получим, что в среднем между A и $V(G) \setminus A$ имеется половина рёбер. Значит, существует такое A, что условие выполняется.

2.1.2. (b) Рассмотрим любую вершину, по которой цикл проходит хотя бы дважды. Можно рассмотреть две части цикла: между первым и вторым прохождениями этой вершины и оставшуюся. Каждая из этих частей является циклом, и одна из них имеет нечётную длину. Уменьшая так длину нечётного цикла, получим несамопересекающийся цикл.

2.2.2. (a) Ответ: при $n \geqslant 4$ имеющих изолированную вершину меньше, при $n = 2, 3$ — поровну, при $n = 1$ их больше.
Для $n \leqslant 3$ это доказывается перебором. Для $n \geqslant 4$ это следует из того, что дополнение графа, имеющего изолированную вершину, не имеет изолированных вершин, и того, что дополнение к пути длины n не имеет изолированных вершин. (*Дополнением графа* (V, E) называется граф $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.)
Другой способ получается из следующего соображения: количество графов с n вершинами, у которых 1 — изолированная вершина, равно количеству графов с $n - 1$ вершинами.

2.2.3. (b) *Другой способ решения.* Индукция по n. Среди d_i обязательно есть единица. Удалим её и применим индукционное предположение. При этом учтем, что удаленная вершина могла быть соединена с различными вершинами в графе.

(c) Если в одном из искомых деревьев стянуть в точку поддеревья $T_1, \ldots, T_r$, то получится дерево с r вершинами. Если у этого дерева степени вершин равны $d_1, \ldots, d_r$, то количество искомых деревьев, ему соответствующих, равно $n_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot n_r^{d_r}$, где n_i — число вершин в дереве T_i. Поэтому искомое число равно

$$\sum_{d_1,\ldots,d_r} \frac{(r-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_r-1)!} n_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot n_r^{d_r} =$$

$$= n_1 \cdot \ldots \cdot n_r (n_1 + \ldots + n_r)^{r-2}.$$

2.2.5. (a) Ответ: деревьев со 100 вершинами больше.
Из дерева с 98 вершинами можно сделать унициклический граф не более чем $\binom{98}{2}$ способами.

Пусть имеется единственная максимальная антицепь D и $x \in D$. Тогда $M - \{x\}$ имеет диаметр $d - 1$ и в силу минимальномти контрпримера разбивается на $d - 1$ цепь $C_1, \dots, C_{d-1}$. Поэтому $x \cup \{C_i\}_{i=1}^{d-1}$ есть искомое разбиение на d цепей.

Пусть имеются две максимальные антицепи D_1 и D_2. Легко показать, что найдется пара элементов $x \in D_1$ и $y \in D_2$ таких, что $x \prec y$. Тогда диаметр множества $M - \{x, y\}$ строго меньше диаметра M и доказательство завершается аналогично.

2.10.1. (a) *Ответ*: такой граф существует при $(V, E) = (2k, 3k)$ для произвольного целого $k > 1$.

Рассмотрим произвольный кубический граф: каждая его вершина имеет степень 3. Сумма степеней всех вершин есть $2E$. Поэтому $3V = 2E$. Тогда пары чисел (V, E) имеют вид $(2k, 3k)$ для некоторого натурального k. Так как нет петель и кратных ребер, то $k = 1$ невозможно.

При $k > 1$ условию удовлетворяют, например, $2k$-угольник с проведенными в нем диагоналями, соединяющими i-тые и $(i + k)$-тые вершины.

(b) *Ответ*: такой граф существует при $d \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ и dn четном.

Для доказательства достаточности расположим вершины графа в вершинах правильного n-угольника. Соединим ребрами вершины, расстояние между которыми по окружности не превосходит $d/2$. Для четного d построение графа закончено. Для нечетного d число n четно, поэтому можно и нужно добавить большие диагонали.

2.10.3. (b) *Доказательство (написано А. Руховичем).* Необходимость целочисленности e вытекает из того, что e равно числу ребер в графе. Второе условие необходимо, поскольку в графе нет петель, а значит степень каждой вершины не больше суммы степеней остальных вершин.

Докажем достаточность индукцией по e. База индукции: утверждение для $e = 0$ очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть утверждение для $e < k$. Докажем, что оно верно и для $e = k \geqslant 1$. Из $k \geqslant 1$ и условия $d_i \leqslant e$ следует, что найдутся хотя бы две вершины ненулевой степени. Можно считать, что $d_1 \geqslant d_2 \geqslant ... \geqslant d_n$. Рассмотрим набор $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. Условия теоремы для него выполнены, поскольку сумма степеней вершин уменьшилась на 2, а степень каждой вершины понизилась не более, чем на 1. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции: существует граф для набора $d_1-1, d_2-1, d_3, ..., d_n$. В этом графе соединим ребром вершины 1 и 2. Поскольку эти вершины различны, то петель не появилось. Следовательно, новый граф не содержит петель. Ясно, что набор степеней его вершин — $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$. QED

2.10.4. *Ответы:* (a,c) да. (b,d,e) нет.

2.10.7. (b) Докажем часть 'только тогда'. Возьмем граф, реализующий исходную последовательность. Если в нем вершина M наибольшей степени и вершина O наименьшей степени соединены ребром, то удалим это ребро. Иначе имеется ребро OX с $X \neq M$.

Пусть X не соединена с M. Тогда среди вершин, соединенных с M, есть вершина N, не соединенная с X. Добавим ребро NX и удалим ребра MN и OX.

Случай, когда X соединена с M, также легко рассматривается.

Приведем два доказательства теоремы о степенных последовательностях из подсказки к задаче 2.10.3.c (они включают решение задач 2.10.3.c, 2.10.9 и 2.10.10).

Доказательство С.А. Чоудама. Индукция по $\sum d_i$. Случай, когда все d_i равны, рассмотрен в задаче 2.10.1.b. Пусть теперь не все d_i равны. Можно считать, что $d_n > 0$.

Определим последовательность c, как в задаче 2.10.10. Более формально, обозначим $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$ и определим последовательность

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad \text{формулой} \quad c_i := \begin{cases} d_i, & i \neq t, n, \\ d_i - 1, & i = t, n. \end{cases}$$

Обозначим $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$, $S'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i$. По задаче 2.10.7.b достаточно доказать неравенства

$$(*) \qquad S'_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

При $k \geqslant t$

$$S'_k = S_k - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

Пусть теперь $k \leqslant t-1$. Тогда $S'_k = S_k = kd_k$.

Для $d_k \leqslant k-1$ неравенство (*) тривиально.

Для $d_k = k$

$$S'_k - k(k-1) = k^2 - k(k-1) = k \overset{(3)}{=} d_{k+1} \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant d_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} d_i - 2\right) \overset{(5)}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}, \quad \text{где}$$

• равенство (3) выполнено, поскольку $k \leqslant t-1$;

• неравенство (4) очевидно, если $k+2 < n$; если же $k+2 = n$, то $d = ((n-2)^{(n-1)}, d_n)$ и $d_n \geqslant 2$ в силу четности суммы $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

• равенство (5) выполнено, поскольку $\min\{k, c_i\} = c_i$ при $i \geqslant k+1$.

Случай $d_k \geqslant k+1$. Если $d_n \geqslant k+1$, то $\min\{k, d_i\} = \min\{k, c_i\} = k$ при $i \geqslant k+1$ и неравенство (*) следует из аналогичного для S_k.

Пусть теперь $d_n \leqslant k$. Имеем

$$\min\{k, c_i\} = \begin{cases} \min\{k, d_i\} & k+1 \leqslant i < n \\ \min\{k, d_n\} - 1 & i = n \end{cases}.$$

В нашем случае $S'_k = S_k$, поэтому достаточно показать, что

$$(**) \qquad S_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1.$$

Учитывая, что $d_{k+1} = d_k \geqslant k+1$, получаем

$$S_{k+1} = (k+1)d_k = \frac{k+1}{k} S_k \overset{(3)}{\leqslant} (k+1)(k-1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} =$$

$$= (k+1)(k-1) + (k+1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k, d_i\} \overset{(5)}{>}$$

$$> (k+1)k + \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k+1, d_i\} \geqslant S_{k+1}.$$

Неравенство (5) выполнено, так как при всех $k+2 \leqslant i < n$ имеем нестрогое неравенство и при $i = n$ строгое. Значит, в (3) неравенство строгое. Отсюда вытекает (**).

Другое доказательство. Первый абзац такой же, как в предыдущем доказательстве. Определим последовательность d', как в задаче 2.10.9. По задаче 2.10.7.a достаточно доказать неравенства из задачи 2.10.5.b для последовательности d'.

Выполнение этих неравенств несложно проверить для $k \geqslant d_1$.

Докажем неравенства *для тех k, для которых $d'_i = d_{i+1} - 1$ при любом $i \leqslant k$.*

Обозначим $S := \sum_{j=k+1}^{n-1} \min(k, d'_j)$.

Случай 1. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ более $d_1 - k$ чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} d'_i \leqslant kd_1 = k(k-1) + k(d_1 - k + 1) \leqslant k(k-1) + S.$$

Первое неравенство выполнено, так как каждое слагаемое в первой сумме не больше d_1. Последнее неравенство выполнено, так как среди чисел $d'_{k+1}, d'_{k+2}, \ldots, d'_{n-1}$ более $d_1 - k$ чисел, не меньших k.

Случай 2. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ не более $d_1 - k$ чисел, больших k. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} d'_i = -d_1 - k + \sum_{i=1}^{k+1} d_i \leqslant k(k+1) - d_1 - k + \sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j) \leqslant$$

$$\leqslant k^2 - d_1 + S + d_1 - k = k(k-1) + S.$$

Первое и четвертое равенства очевидны. Второе неравенство — известное для старой последовательности. Докажем третье неравенство. Среди чисел $d_{k+2}, d_{k+3}, \ldots, d_n$ ровно $d_1 - k$ чисел было уменьшено на 1 при переходе к новой последовательности. Поэтому в сумме $\sum_{j=k+2}^{n} \min(k+1, d_j)$ при переходе к S первые $d_1 - k$ слагаемых уменьшились на 1, а остальные не изменились.

Докажем неравенства *для оставшихся случаев???.*

2.10.11. (a,b) *Ответы:* то же, что в соответствующих пунктах задачи 2.10.3, с добавлением условия $n-1 \leqslant e$.

Доказательство п. (b) (предложено А. Руховичем). Для доказательства необходимости обозначим через e количество ребер в графе. Необходимость условий (1), (2) и (3) легко проверяется.

Для доказательства достаточности рассмотрим граф, полученный по ответу к задаче 2.10.3.b. Обозначим через c количество компонент связности этого графа.

Докажем, что если $c > 1$, то можно уменьшить количество компонент связности, не меняя степеней вершин. Из условия (3) получаем $e \geqslant n-1 > n-c$. Поэтому хотя бы в одной компоненте связности есть цикл. Тогда можно взять ребро a_1a_2 этого цикла и ребро b_1b_2 из другой компоненты связности. Удалим эти ребра, и вместо них добавим ребра a_1b_1 и a_2b_2 (ср. с задачей 2.10.8). Тогда степени вершин сохранятся, а количество компонент связности уменьшится на 1.

Такими операциями можно понизить количество компонент связности до 1. Получится связный граф без петель с заданными степенями вершин. QED

4 Основы теории Рамсея

4.1 Двухцветные числа Рамсея

4.1.1. (33') Среди пяти человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни трёх попарно незнакомых.

(33) Среди любых шести человек найдётся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43) Среди любых десяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(439) Среди любых девяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43') Среди восьми человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни четверых попарно незнакомых.

(44) Среди любых 18 человек найдётся либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

(35) Среди любых 14 человек найдётся либо 5 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

Числом Рамсея $R(m,n)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

• среди любых x человек найдётся либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых.

• в любом графе с x вершинами найдётся либо m-клика, либо n-антиклика.

• для любой раскраски рёбер графа K_x в синий и красный цвета найдётся либо синяя m-клика, либо красная n-клика.

Например, очевидно, что $R(1,n)=1$ и $R(2,n)=n$ для любого n. В задаче 4.1.1 доказано, что $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$, $R(4,4)\leqslant 18$ и $R(3,5)\leqslant 14$. Но не очевидно, что такое число существует для любых m,n.

4.1.2. (a) Если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ существуют, то число $R(m,n)$ существует и $R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$. Это утверждение обычно коротко записывают в виде «$R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$». *Далее аналогичные утверждения записываются только в кратком виде.*

(b) $R(m,n) \leqslant \binom{m+n-2}{m-1}$.
(c) $R(m,n) \leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)-1$, если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ чётны.
(d) $R(5,5) \leqslant 62$.

4.1.3. (a) Если в графе с 13 вершинами нет ни треугольника, ни 5-антиклики, то степень каждой вершины равна 4.
(b) Если в графе с 18 вершинами нет ни треугольника, ни 6-антиклики, то степень каждой вершины равна 5.
(Во избежание порочного круга, при решении этой и других задач не используйте без доказательства ни равенства $R(3,6) = 18$, ни других фактов, которые не умеете доказывать.)

4.1.4. (a) $R(4,4) \geqslant 18$. (b) $R(3,5) \geqslant 14$.

4.1.5. (a) $R(n,n) > (n-1)^2$.
(b) **Теорема Эрдеша.** $R(n,n) > n2^{(n-3)/2}$, *начиная с некоторого* n.
(Более точно, теорема Эрдеша утверждает, что $R(n,n) \gtrsim n2^{n/2}/e$. Знак $\gtrsim$ определен в п. 6.1. Доказать эту теорему вы сможете после решения следующих пунктов.)
(c) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r$.
(d) Если $\binom{r}{n} < s2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r-s$.
(e) $R(n,n) > r - \binom{r}{n}2^{1-\binom{n}{2}} - 1$ для любого r.

4.1.6. В любом турнире с 4^n вершинами можно выбрать вершины $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы каждое ребро между ними было направлено от большего номера к меньшему.

4.1.7. При любой раскраске рёбер графа K_n в два цвета в нём найдётся гамильтонов цикл, состоящий из двух одноцветных путей (цвета путей могут быть и одинаковы, и различны).

4.2 Многоцветные числа Рамсея

4.2.1. (a) На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Тогда

есть одноцветный треугольник.
(b) Придумайте 9 точек на плоскости и раскраску в 3 цвета всех соединяющих их отрезков, для которой нет одноцветного треугольника.
(c) То же, что в п. (b), для 16 точек.

Числом Рамсея $R(m_1, \ldots, m_k)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски рёбер графа K_x в k цветов для некоторого i найдётся m_i-клика i-ого цвета (т.е. m_i вершин, попарно соединённых рёбрами цвета i).

Например, очевидно, что $R(1, m, n) = 1$ и $R(2, m, n) = R(m, n)$ для любых m, n. В задаче 4.2.1 доказано, что $R(3, 3, 3) \leqslant 17$, $\geqslant 10$ и $\geqslant 17$. Но не очевидно, что такое число существует для любых $m_1, \ldots, m_k$.

4.2.2. (a) $R(m, n, p) \leqslant R(R(m, n), p)$.
(b) $R(m_1, m_2, \ldots, m_k) \leqslant$

$$\leqslant R(m_1-1, m_2, \ldots, m_k)+R(m_1, m_2-1, \ldots, m_k)+\ldots+R(m_1, m_2, \ldots, m_k-1).$$

(c) Найдите оценку на $R(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ через полиномиальные коэффициенты.

4.2.3. Если рёбра графа K_{31} раскрашены в синий, белый и красный цвета так, что нет ни синей 4-клики, ни белой 3-клики, ни красной 3-клики, то из каждой вершины выходит 14, 15 или 16 синих рёбер.

4.2.4. Теорема. *Для любого целого $m > 0$ существует такое $M > 0$, что для любого простого числа $p > M$ сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение.* (Доказать эту теорему вы сможете после решения двух следующих задач.)

4.2.5. Сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение для (a) $m = 2$, $p = 89$; (b) $m = 3$, $p = 89$; (c) $m = 4$, $p = 83$; (d) $m = 3$, $p = 97$; (e) $m = 9$, $p = 97$.

4.2.6. Теорема Шура. *Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.*

Более точно, для любого целого $k > 0$ существует такое целое $r > 0$, что для любой раскраски первых r натуральных чисел в k цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

4.2.7. (a,b) Найдите нижние оценки на $R(\underbrace{n, \dots, n}_{k})$, аналогичные утверждениям 4.1.5.ab.

4.3 Числа Рамсея для гиперграфов

4.3.1. Среди любых четырёх из 8000 студентов имеется слаженная тройка (т. е. тройка, составляющая слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что можно выбрать 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

4.3.2. (a) Среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 4-угольник.
(b) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.
(c) Среди любых 9 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 5-угольник.
(d) **Теорема Эрдеша-Секереша.** *Для некоторого n среди любых n точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 10-угольник.* (Ср. с задачей 4.4.4.)

Числом Рамсея для гиперграфов $R_l(m_1, \dots, m_k)$, $m_1, \dots, m_k \geqslant l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски всех l-элементных подмножеств x-элементного множества в k цветов найдутся i и подмножество размера m_i, у которого все l-элементные подмножества покрашены в i-й цвет. («Число Рамсея для гиперграфов» — единый термин, определённый выше; знание термина «гиперграф» не нужно для его понимания.)

Например, очевидно, что $R_2(m_1, \dots, m_k) = R(m_1, \dots, m_k)$ и $R_3(3, n) = n$. В задаче 4.3.1 требуется доказать, что $R_3(5, 4) \leqslant 8000$. А при решении задачи 4.3.2.d требуется доказать, что $R_3(10, 10)$ или $R_4(5, 10)$ существует.

4.3.3. (a) Число $R_l(m_1, \dots, m_k)$ существует для любых $m_1, \dots, m_k$. (Это не очевидно!)

(b) $R_l(m_1,\ldots,m_k) \leqslant R_l(R_l(m_1,m_2),m_3,\ldots,m_k)$.
(c) $R_l(m,n) \leqslant R_{l-1}(R_l(m-1,n),R_l(m,n-1))+1$.

4.3.4. (a) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{3}-1}$, то $R_3(n,n) > r$.
(b) Найдётся такое число $c>0$, что $R_3(n,n) \geqslant 2^{cn^2}$.
(c) Найдите нижние оценки на $R_l(\underbrace{n,\ldots,n}_{k})$, аналогичные утверждениям 4.1.5.ab (ср. с задачей 4.2.7).

Заметим, что $R_l(\underbrace{n,\ldots,n}_{r^{2r}+1}) \geqslant (l-1)r^{r^{\cdots^{r}}}$ (степенная башня высотой n). Доказательство этого факта выходит за рамки этой книги.

4.4 Результаты рамсеевского типа

4.4.1. Верно ли, что для любой раскраски точек плоскости в два цвета найдётся
(a) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1 или $\sqrt{3}$?
(b) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1?
(c) одноцветный треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \pi$?

4.4.2. При любой раскраске точек плоскости в три цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1.

4.4.3. (a) Найдётся такое n, что для любой раскраски пространства $\mathbb{R}^n$ (определение см. в §7) в 9 цветов найдётся прямоугольник с одноцветными вершинами и сторонами 1 и 2.
(b) Верно ли, что для любого параллелограмма P с неперпендикулярными сторонами найдётся такое n, что для любой раскраски точек пространства $\mathbb{R}^n$ в 4 цвета найдётся равный P параллелограмм с одноцветными вершинами?

4.4.4. Назовем *m-чашкой* (*m-шапкой*) подмножество из m точек графика выпуклой вниз (вверх) функции. Обозначим через $f(k,l)$ минимальное число n, такое что среди любых n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на прямой, есть либо k-чашка, либо l-шапка. (Не очевидно, что такое число существует. Поэтому о формулах из этой задачи справедливо замечание, аналогичное сделанному в задаче 4.1.2.a.)

(a) Среди любых $f(m, m)$ точек на плоскости найдётся выпуклый m-угольник. (Ср. с задачей 4.3.2.)

(b) $f(k, l) \leqslant f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$.

(c) $f(k, l) \leqslant \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

(d) $f(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

4.4.5. (a) При любой раскраске чисел $1, \ldots, 9$ в 2 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(b) Аналог предыдущего пункта для чисел $1, \ldots, 8$ неверен.

(c) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1, \ldots, W$ в 2 цвета найдётся либо трёхчленная арифметическая прогрессия первого цвета, либо четырёхчленная — второго.

(d) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1, \ldots, W$ в 3 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(e) То же, что в предыдущем пункте, для r цветов.

(f)* **Теорема Ван дер Вардена.** *Для любых k, r при любой раскраске натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная k-членная арифметическая прогрессия.* (Ср. с теоремой Шура 4.2.6.)

4.4.6. (a) Из любых 5 точек на плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.

(a') Для любых 5 точек общего положения на плоскости количество пересечений отрезков, не имеющих общих концов, каждый из которых соединяет данные точки, нечетно.

(Набор точек на плоскости называется набором *общего положения*, если никакие 3 из них не лежат на одной прямой.)

(b) **Теорема Конвея–Гордона–Закса для линейных вложений.** *Для любых 6 точек общего положения в пространстве найдутся два* зацепленных *треугольника с вершинами в этих точ-*

ках (т.е. таких, что объединение сторон первого пересекает второй двумерный треугольник в единственной точке.)

(Набор точек в пространстве называется набором *общего положения*, если никакие 4 из них не лежат в одной плоскости.)

(c) **Теорема ван Кампена–Флореса для линейных вложений.** *Из любых 7 точек в четырехмерном пространстве можно выбрать две такие непересекающиеся тройки точек, что образованные этими тройками двумерные треугольники пересекаются.*

Подробнее см. [G].

4.5 Числа Рамсея для подграфов

4.5.1. Для любых графов G и H существует целое положительное число x, для которого при любой раскраске рёбер графа K_x в два цвета найдётся либо подграф первого цвета, изоморфный G, либо подграф второго цвета, изоморфный H.

Наименьшее из таких чисел x обозначается $R(G,H)$.

4.5.2. $R(G,H) \geqslant (\chi(G)-1)(c(H)-1)+1$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G, $c(H)$ — число вершин в наибольшей компоненте связности.

4.5.3. Обозначим через T_m дерево на m вершинах.
(a) $R(T_m, K_n) = (m-1)(n-1)+1$.
(b) Если $m-1$ делит $n-1$, то $R(T_m, K_{1,n}) = m+n-1$.

4.5.4. Обозначим через nK_3 граф из n непересекающихся (по вершинам) треугольников.
(a) $R(nK_3, nK_3) \geqslant 5n$.
(b) Ребра графа раскрашены в синий и красный цвета. Если в графе есть синий и красный треугольники, то среди их вершин есть пять вершин A, B, O, C, D, для которых треугольник AOB синий, а треугольник COD красный.
(c) $R(nK_3, nK_3) \leqslant 5n+1$.
(d)* $R(2K_3, 2K_3) = 10$.
(e)* $R(nK_3, nK_3) = 5n$ для любого $n > 1$.

4.5.5. Найдите $R(K_3, C_n)$, где C_n — цикл с n вершинами (см. п. 2.1).

Здесь второе неравенство получено в задаче 6.1.6.c. Поэтому и по (e)

$$R(n,n) > r - \binom{r}{n} 2^{1-\binom{n}{2}} - 1 \geqslant r - 2^{\frac{n^2}{2}+1-\binom{n}{2}} - 1 \gtrsim \frac{n2^{\frac{n}{2}}}{e} - 2^{1+\frac{n}{2}} \gtrsim \frac{n2^{\frac{n}{2}}}{e}.$$

4.1.6. По индукции по n (даже с заменой 4^n на 2^n).

Или используйте $R(n,n) < 4^n$. Занумеруйте вершины в турнире и соедините вершины ребром, если вершина с большим номером выиграла у вершины с меньшим. Тогда клика или антиклика на n вершинах будет искомым графом.

4.1.7. Индукция по n. Предположим, для K_n такой цикл обязательно существует. Выберем в K_{n+1} такой цикл из n вершин. Занумеруем вершины так, чтобы путь $k, k+1, \dots, n$ был синим, а $n, 1, \dots, k$ — красным. Если ребро $(n, n+1)$ синее, то удалим из цикла ребро $(n, 1)$ и добавим $(n, n+1)$, $(n+1, 1)$. Если ребро $(n, n+1)$ красное, то удалим из цикла ребро $(n-1, n)$ и добавим $(n, n+1)$, $(n+1, n-1)$. Получим нужный гамильтонов цикл (независимо от цвета рёбер $(n+1, 1)$ и $(n+1, n-1)$).

4.2.1. (a) *При написании этого решения использованн текст Е. Шлыкова.* Для любой отмеченной точки x будем называть желтым соседом другую отмеченную точку, которую соеденили с точкой x желтым отрезком. Аналогично для каждой отмеченной точки определяются красные и синие соседи.

Рассмотрим произвольную отмеченную точку. Она имеет либо хотя бы шесть красных соседей, либо хотя бы шесть желтых соседей, либо хотя бы шесть зеленых соседей. В противном случае она соединена не более чем с пятнадцатью точками, что противоречит условию. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая точка имеет шесть желтых соседей. Среди них либо есть пара точек, соединенная желтым отрезком, либо никакие две точки не соединены желтых отрезком. В первом случае найден желтый треугольник. Во втором случае по утверждению 4.1.1.(33) среди этих 6 точек есть либо красный треугольник, либо зеленый треугольник.

4.4.5. (a) Предположим, что существует раскраска чисел от 1 до 9 без одноцветной арифметической прогрессии длины 3. Если 4 и 6 покрашены в цвет 1, то $2, 5, 8$ покрашены в цвет 2 и получается, что есть арифметическая одноцветная прогрессия $2-5-8$. Предположим теперь, что 4 покрашено в цвет 1, а 6 в цвет 2. Без ограничения общности, 5 покрашено в цвет 1. Тогда 3 покрашено в цвет 2, 9 в цвет 1, 1 в цвет 2, 2 в цвет 1, 8 в цвет 2, 7 в цвет 1 и мы получаем одноцветную прогрессию $1-4-7$.

(b) 1368 и 2457.

(c) Рассмотрим такое n, что при любой раскраске чисел в два цвета найдутся числа i, j, k, удовлетворяющие условиям $i < j < i+k < j+k < n/2$ и раскрашенные в первый цвет. Тогда числа $2i-j+2k, i+2k, j+2k, 2j-i+2k$ покрашены во второй цвет.

(e) (При написании этого решения использован текст А. Волостнова.) Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Для любого целого $k \geqslant 0$ существует такое целое $W = W(k)$, что для любой раскраски в r цветов множества $\mathcal{R}_W$ существуют такие целые положительные $a, a_1, \ldots, a_k$, что все числа следующего множества лежат в $\mathcal{R}_W$ и имеют один цвет:

$$\left\{a + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + \sum_{i=s+1}^{k} b_i a_i \ :\ b_i \in \{0,1\},\ s \in \{0,1,2,\ldots,k\}\right\}.$$

Доказательство. Индукция по k. База индукции: достаточно взять $W(0) = 1$. Докажем шаг индукции. Пусть лемма верна для k. Рассмотрим промежутки $I_n = (nW(k), (n+1)W(k)] \cap \mathbb{Z}$ для всех n от 0 до $r^{W(k)}$. По принципу Дирихле, какие-то два из этих промежутков раскрашены одинаково. Обозначим их I_{n_1} и I_{n_2}. Применим для промежутка I_{n_1} предположение индукции ('сдвинутое'). Получим числа $a, a_1, \ldots, a_k$ из леммы. Возьмем

$$W(k+1) = W(k)\left(2r^{W(k)} + 1\right) \quad \text{и} \quad a_{k+1} := |n_1 - n_2|\, W(k)$$

('расстояние' между промежутками I_{n_1} и I_{n_2}). Тогда выполнение леммы для $k+1$ очевидно. $\square$

Применим лемму для $k = r$. Получим числа $a, a_1, \ldots, a_k$. Обозначим $N_s := a + \sum\limits_{i=1}^{s} 2a_i$. По принципу Дирихле существуют такие целые $0 \leqslant$

$s < t \leqslant k$, что числа N_s и N_t одноцветны. По лемме числа N_s и $N_s + \sum\limits_{i=s+1}^{t} a_i$ одноцветны. Итак, нашлась трехчленная арифметическая прогрессия $N_s,\ N_s + \sum\limits_{i=s+1}^{t} a_i,\ N_t$.

4.5.1. Возьмите $x = R(p, q)$, где p — число вершин в G, а q — число вершин в H.

4.5.2. Рассмотрим $\chi(G)-1$ непересекающихся подмножеств из $(c(H)-1)$ элементов каждое. Покрасим рёбра внутри подмножеств в цвет 2, а оставшиеся рёбра — в цвет 1.

4.5.3. (a) Нижняя оценка следует из предыдущей задачи. Верхняя доказывается по индукции по сумме $m+n$. База $m = n = 2$ очевидна. Чтобы доказать шаг, возьмем произвольную раскраску графа $K_{(m-1)(n-1)+1}$. Так как $(m-1)(n-1)+1 > R(T_{m-1}, K_n)$ и T_{m-1} получается из T_m удалением висячего ребра, то можно считать, что в нашем графе есть подграф T_{m-1} первого цвета. Вне подграфа T_{m-1} имеется $(m-1)(n-2)+1 = R(T_m, K_{n-1})$ вершин. Тогда можно считать, что есть подграф K_{n-1} второго цвета. Если все рёбра, соединяющие y с вершинами подграфа K_{n-1}, второго цвета, то есть подграф K_n. А если хотя бы одно из них первого цвета, то добавим новую вершину к T_{m-1} и получим граф T_m.
(b) Нижняя оценка (т. е. пример) строится аналогично решению предыдущей задачи. Делим граф из $m+n-2$ вершин на доли по $m-1$, каждую долю красим в первый цвет, а рёбра между долями — во второй.
Верхняя оценка доказывается аналогично решению п. (а).

4.5.4. (a) Делим $5n-1$ вершин на три доли: $(3n-1)$-красная клика, $(2n-1)$-синяя клика и ещё одна вершина. Из $(3n-1)$-клики все исходящие рёбра — синие, а ребра из $(2n-1)$-синей клики в выделенную вершину — красные.
(b) Небольшой перебор.

(Задачу получает именно пятерка, а не школьник.) Как это сделать, чтобы непересекающиеся пятерки получили разные задачи?

(c) В условиях п. (b) 11 задач недостаточно.

5.1.5. Для $l < k$ обозначим через $M(n,k,l)$ минимальное количество таких k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любое l-элементное подмножество множества $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Например, задача 1.5.2.a утверждает, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l}/\binom{k}{l}$.

(a) Найдите $M(n,k,1)$.

(b) Найдите $M(6k+3,3,2)$.

(c)* Найдите $M(n,3,2)$.

(d) Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant nM(n-1,k-1,l-1)/k$.

5.1.6. Существует k подмножеств R-элементного множества по n элементов в каждом, никакие два из которых имеют не более s общих элементов, для

(a) $k = 2^a = R$, $n = 2^{a-1}$, $s = 2^{a-2}$;

(b) $k = 60$, $R = 1600$, $n = 80$, $s = 4$;

(c) p простое, $k = p^2 + p$, $R = ps^2$, $n = ps$.

Ср. с п. 5.7 и 7.1.

5.2 Системы общих представителей

5.2.1. В группе студентов Яндекса 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т.д., всего 18 видов проблем (так что, очевидно, некоторые студенты являются специалистами по разным проблемам). Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков. При этом хочется, чтобы для каждой проблемы в команде нашелся специалист по ней и чтобы размер команды был как можно меньше (для экономии зарплаты).

(a) При любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.

(b) При некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.

Системой общих представителей (сокращённо с.о.п.) для набора $\mathcal{M}$ множеств называется такое множество A, что $M \cap A \neq \varnothing$ для любого $M \in \mathcal{M}$.

5.2.2. Для набора $\{\{1,6\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\}$ множеств найдите (a) некоторую с.о.п.; (b) с.о.п. наименьшего размера.

5.2.3. (a) Найдите наименьший размер с.о.п. для набора всех k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(b) Сколько для него имеется с.о.п. наименьшего размера?

Минимальная с.о.п. — с.о.п. наименьшего размера для данного набора $\mathcal{M}$. Назовем (n,s,k)-*набором* элемент из $\binom{\binom{\mathcal{R}_n}{k}}{s}$, т.е. набор k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, в котором s множеств. (Этот термин не общепринят.)

5.2.4. (a) Постройте $(2n, 2\binom{n-1}{k-1}, k)$-набор, для которой минимальная с.о.п. состоит из двух элементов и единственна.
(b) При данных n, k найдите наибольшее s, для которого найдётся (n,s,k)-набор, имеющая ровно две минимальные с.о.п.

5.2.5. *Жадным алгоритмом* называется следующий. Возьмем любой элемент, лежащий в максимальном количестве множеств данного набора. Добавим его в ‘пред-с.о.п’ и выкинем множества, которые его содержат. Аналогично возьмем элемент, лежащий в максимальном количестве оставшихся множеств, и т.д.

Постройте набор множеств, наименьший размер с.о.п. которого на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если (a) $k=1$; (b) $k=2$; (c) k произвольно.

5.2.6. *
(a) Для любого (n,s,k)-набора найдется с.о.п. размера меньше

$$G(n,s,k) := \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1.$$

(b) Если $n \geqslant 32k$ и $60 \leqslant \dfrac{sk}{n} < e^k$, то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $\dfrac{n}{64k}\ln\dfrac{sk}{n}$.

(c) Если

$$k \leqslant n-l \quad \text{и} \quad G\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{l}, \binom{n-l}{k}\right) \leqslant s,$$

то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

(d) Для всех достаточно больших n если $k^2l+kl^2 < n^{1.8}$, то $k < n-l$ и $\binom{n}{k}/\binom{n-l}{k} < 2e^{kl/n}$.

(e) Для всех достаточно больших n и k если $101\ln\ln k < \ln\frac{sk}{n} < \sqrt{k} < \sqrt[4]{n}$, то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $0,99\dfrac{n}{k}\ln\dfrac{sk}{n}$.

(f) Если

$$l \leqslant n-k \quad \text{и} \quad \binom{n}{l}\binom{\binom{n}{k}-\binom{n-l}{k}}{s} < \binom{\binom{n}{k}}{s},$$

то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

5.3 Системы различных представителей

5.3.1. (a) *Лемма о паросочетаниях.* Пусть есть несколько (конечное число) юношей и девушек. Каждый юноша любит некоторое (вполне возможно, нулевое) число девушек. Тогда всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались) тогда и только тогда, когда для любого множества юношей число девушек, которых любит хотя бы один из них, не меньше числа этих юношей.

(b) *Теорема Холла.* Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — конечные множества. В каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in S_i$ так, чтобы все x_i были различны, тогда и только тогда, когда для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ объединение любых k из этих множеств имеет не менее k элементов.

5.3.2. Какое минимальное количество рёбер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось паросочетаний (т. е. подграфа из n непересекающихся отрезков)?

Системой различных представителей (сокращенно с.р.п.) упорядоченного набора $(S_1, \ldots, S_m)$ множеств называется упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_m)$ их различных элементов, для которого $x_j \in S_j$ при любом $j = 1, \ldots, m$.

(Упорядоченность набора важна, чтобы правильно определить с.р.п. набора множеств, некоторые из которых совпадают, а также для подсчёта количества с.р.п. в задаче 5.3.5.)

Например, теорема Холла утверждает, что у набора $(S_1, \ldots, S_m)$ конечных множеств есть система различных представителей тогда и только тогда, когда $|\cup_{i \in I} S_i| \geqslant |I|$ для любого $I \subset \{1, \ldots, m\}$.

5.3.3. Пусть для системы m-элементных множеств каждый элемент, входящий хотя бы в одно из них, входит ровно в l из них. Тогда при $m \geqslant l$ у этой системы множеств есть с.р.п.

5.3.4. С.р.п. поднабора можно дополнить до с.р.п. всего набора. Вот более подробная формулировка. Из набора $\mathcal{M}$ множеств выбрано несколько подмножеств $S_1, \ldots, S_k$. Допустим, что элементы $x_1, \ldots, x_k$ — это с.р.п. набора множеств $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{M}$. Если у всего набора $\mathcal{M}$ есть с.р.п., то существует его с.р.п., содержащая элементы $x_1, \ldots, x_k$.

5.3.5. Обозначим через $F(S_1, \ldots, S_m)$ количество с.р.п. у системы $\{S_1, \ldots, S_m\}$.

(a) Для любого ли k существует система $S_1, \ldots, S_m$ такая, что $F(S_1, \ldots, S_m) = k$?

(b) Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2)$ при условии $|S_1| = |S_2| = 5$.

(c)* Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2, S_3)$ при условии $|S_1| = |S_2| = |S_3| = 5$.

5.3.6. Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S = \bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть выполнено одно из следующих условий.

(a) Для любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ содержит не более k из множеств $B_1, \ldots, B_m$.
(b) $|A_1| = \ldots = |A_m| = |B_1| = \ldots = |B_m|$.
Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$ так, чтобы после перенумерации $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots, m$.

5.3.7.* Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S = \bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть для любых подмножеств $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ выполнено неравенство:

$$\left|\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\right| \geqslant |I| + |J| - m.$$

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$ так, чтобы после перенумерации нашлись попарно различные элементы $x_i \in A_i \cap B_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Такой набор $x_1, \ldots, x_m$ называются *общей системой различных представителей* наборов множеств $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_m$.

5.3.8. (a) При каком условии на любовь юношей и девушек можно распределить всех девушек по непересекающимся гаремам, в каждом из которых ровно по две жены?
Или, формально, найдите необходимое и достаточное условие на двудольный граф, при котором вершины можно занумеровать $A_1, \ldots, A_n$ (в первой доле) и $B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n$ (во второй доле) так, что есть рёбра $A_1B_1, A_1C_1, \ldots, A_nB_n, A_nC_n$.
(b) Пусть есть m юношей и несколько девушек, каждый юноша любит не менее t девушек, причем всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались), т. е. есть паросочетание. Тогда имеется не менее

$$\begin{cases} t!, & t \leqslant m \\ t!/(t-m)!, & t > m \end{cases}$$

способов переженить юношей на любимых ими девушках.

5.4 Перманент

Перманент квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ определяется формулой

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

где Σ_n есть множество всех перестановок n-элементного множества.

5.4.1. Найдите перманент матрицы

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

(k) 4×4, у которой $k = 0, 1, 2, 3, 4$ диагональных элементов — нули, а все остальные (в т.ч. не диагональные) элементы — единицы;

(n) $n \times n$, у которой на диагонали нули, а вне диагонали — единицы.

Подматрицей данной матрицы называется матрица, полученная из данной вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. *Перманент* прямоугольной матрицы A определяется как сумма перманентов всех квадратных подматриц максимального размера. Или, формулой, при $m < n$

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i,\sigma(i)},$$

где сумма берётся по всем m-элементным размещениям чисел от 1 до n. При $m > n$ положим $\mathrm{Per}(A) := \mathrm{Per}(A^T)$.

5.4.2. Найдите перманент матрицы $m \times n$, состоящей из одних единиц.

5.4.3. (a) Перманент не меняется при перестановке строк.

(b) *Формула разложения по строке.* Если $m \leqslant n$, то для любого i

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Per}(A_{ij}),$$

где A_{ij} — матрица, получаемая из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

5.4.4. (a) Перманент матрицы $n\times n$ из нулей и единиц равен нулю тогда и только тогда, когда есть нулевая подматрица $s\times t$, где $s+t = n+1$.
(b) Для любых $m \leqslant n$ перманент прямоугольной матрицы $m \times n$ из нулей и единиц равен количеству с.р.п. (§5.3) для системы из m подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$, определяемых строками.

5.5 Размерность Вапника-Червоненкиса

5.5.1. (a) Математики Вася и Чарли играют. Сначала Чарли отмечает на плоскости k точек. Затем Вася красит некоторые из этих точек. Если теперь Чарли сможет провести прямую, отделяющую покрашенные точки от непокрашенных, то он выиграл, иначе — проиграл. При каком наибольшем k Чарли может выиграть независимо от действий Васи?
(b) То же, но точки отмечаются в пространстве, и Чарли проводит полуплоскость.

Пусть $\mathcal{R} \subset 2^X$ — семейство подмножеств произвольного множества X. *Размерностью Вапника-Червоненкиса* $VC(X, \mathcal{R})$ (или VC-размерностью) пары $(X, \mathcal{R})$ называется максимальное n такое, что существует n-элементное подмножество $A \subset X$, для которого любое подмножество в A является пересечением A и некоторого подмножества из $\mathcal{R}$. Такое подмножество A называется *дробящимся* системой $\mathcal{R}$. Если такого n не существует, то полагают $VC(X, \mathcal{R}) := \infty$.

Естественные примеры, в том числе пример с бесконечностью, приведены в следующих задачах.

5.5.2. (a) Найдите VC-размерность семейства всех (двумерных замкнутых) прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат.
(b) *Теорема.* VC-размерность семейства всех полупространств в $\mathbb{R}^n$ равна $n+1$.
(c) *Теорема Радона.* Любые $n+2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

5.5.3. Найдите VC-размерность следующих семейств множеств:
(a) $\{\{1, \ldots, k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;

(b) $\{\{k,\, k+1,\, k+2,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(c) $\{\{k,\, 2k,\, 3k,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(d) $\{\{k,\, k^2,\, k^3,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;

5.5.4. Найдите VC-размерность следующих конечных семейств:
(a) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{2,4,5,6\}$.
(b) $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,6,7\}$.
(c) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$, $\{1,6,9\}$.
(d) Можно ли добавить ещё одно множество к системам из предыдущих пунктов так, чтобы VC-размерность увеличилась на 1?

5.5.5. (a) Возможно ли равенство $VC(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) = \infty$ для некоторого набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$?
(b) То же для некоторого счётного набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$ ограниченных множеств.

5.5.6. В любом семействе VC-размерности d, в каждом множестве которого не более r элементов, найдутся такие подмножества X и Y, что (a) $|X \cap Y| \leqslant r - d$; (b) $|X \cap Y| \geqslant d - 1$.

5.5.7. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ и $|\mathcal{R}| = n$, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ найдётся такое множество A, что $|\{R \cap A \mid R \in \mathcal{R}\}| \geqslant k = |A| + 1$.

5.5.8. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ — семейство VC-размерности d, то существует *наследственное* (т. е. содержащее с каждым множеством все его подмножества) семейство $\mathcal{R}' \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ VC-размерности d, для которого (a) $|\mathcal{R}'| \leqslant |\mathcal{R}|$; (b) $|\mathcal{R}'| \geqslant |\mathcal{R}|$.

5.5.9. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$, то

$$|\mathcal{R}| \leqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{VC(\mathcal{R}_n, \mathcal{R})}.$$

5.6 Подсолнухи

Подсолнухом с k лепестками и ядром Y называют такой набор множеств $\{F_1, \ldots, F_k\}$, что $F_i \cap F_j = Y$ при $i \neq j$ и все множества $F_i \setminus Y$ непусты. Например,

• попарно непересекающиеся множества образуют подсолнух с пустым ядром.

(b) Оценка $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$ в пункте (a) точна.

5.6.5. *Цветком с k лепестками и ядром Y* называется такой набор $\mathcal{F}$ множеств, что каждое из них содержит Y и не существует с.о.п. из $k-1$ элемента для набора $\{S \setminus Y : S \in \mathcal{F}\}$.

(a) Если $\mathcal{F}$ — конечный набор s-элементных множеств и $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$, то $\mathcal{F}$ содержит цветок с k лепестками (и некоторым ядром).

(b) Оценка $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$ из п. (a) точна.

5.7 Лемма Виссера и теоремы о возвращении

5.7.1. В парламенте из 100 000 депутатов образовано k комиссий по 2 000 человек в каждой.

(a) Если $k \geqslant 100$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 21 общего члена.

(b) Если $k \geqslant 5\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 29 общих членов.

(c) Если $k \geqslant 250\,000$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 32 общих члена.

(d) Если $k \geqslant 2 \cdot 50^{30}$, то какие-то две комиссии имеют хотя бы 40 общих членов.

Подмножество отрезка $[0, 1]$ называется *хорошим*, если оно является объединением конечного числа непересекающихся интервалов. *Длиной* $|E|$ хорошего множества E называется сумма длин его интервалов.

5.7.2. (a) Пересечение и объединение хороших множеств — хорошее множество.

(b) Если $E_1, \dots, E_k$ — попарно непересекающиеся хорошие множества длины $1/k$ каждое и E_0 — хорошее множество длины $1/k$, то $|E_0 \cap E_j| \geqslant 1/n^2$ для некоторого $j \geqslant 1$.

(c) Придумайте пример бесконечного семейства хороших множеств длины $1/2$ каждое, длина пересечения любых двух из которых не превосходит $1/4$.

(d) То же для длины $1/n$ и длины пересечения не более $1/n^2$.

5.7.3. (a) Если дана бесконечная последовательность хороших множества длины m каждое, то длина пересечения некоторых двух из них не меньше $m^2/2$.

(b) *Лемма Виссера.* То же для $0,99m^2$.

(Задача 5.7.2 поясняет роль множителей 0.99 и m^2.)

Пусть заданы числа $0 = \alpha_0 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = 1$. *Перекладыванием отрезков* называется отображение $f\colon [0, 1) \to [0, 1)$, определенное некоторой перестановкой отрезков $[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$. Более аккуратно, возьмем перестановку $\sigma : [k] \to [k]$. Для любых $j \leqslant k$ и $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ определим $f(x) := x + \sum\limits_{i<\sigma(j)} (\alpha_i - \alpha_{i-1})$.

Через f^n обозначим n-ю итерацию отображения $f\colon [0,1) \to [0,1)$: $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз).

5.7.4. (a) (Загадка) Найдите n-ю итерацию нетривиального перекладывания двух отрезков, если дано α_1.

(b) Если длины всех отрезков рациональны, то некоторая итерация перекладывания отрезков — тождественное отображение.

(c) Придумайте перекладывание отрезков, один из которых имеет иррациональную длину, причем квадрат перекладывания — тождественное отображение.

(d) Придумайте перекладывание отрезков, никакая итерация которого не является тождественным отображением.

(e)* Придумайте перекладывание отрезков, ни для какой итерации g которого нет ни собственных подотрезков, переходящих при g в себя, ни такого a, что $g(x) = \{x + a\}$ при любом $x \in [0,1)$.

5.7.5. Пусть $E \subset [0,1)$ — хорошее непустое множество и f — перекладывание отрезков.

(a) Множество $f(E)$ хорошее.

(b) *Теорема Пуанкаре-Каратеодори о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| > 0$.

(b') Такое n найдется на любом достаточно большом интервале (т.е. существует такое L, что для любого целого M число n из п. (a) найдется среди чисел $M, M+1, \ldots, M+L$).

(c) *Теорема Хинчина о возвращении множеств.* Существует сколь угодно большое n, для которого $|E \cap f^n(E)| \geqslant 0,99|E|^2$.

(c') Такое n найдется на любом достаточно большом интервале.

5.7.6. Назовем *хорошим* объединение конечного количества многоугольников (лежащих на одной плоскости) без границы с непересекающимися внутренностями. Сформулируйте и докажите аналоги

(a) леммы Виссера; (b) теоремы Пуанкаре-Каратеодори;

(c) теоремы Хинчина

для взаимно-однозначного отображения единичного квадрата в себя, сохраняющего хорошие подмножества и их площади (например, для *преобразования пекаря*).

Ср. с п. 5.1 и 7.1.

5.8 Структуры на конечном множестве

Благодарю Никокошева Илью за полезные обсуждения.

В п. 1.4 рассмотрены некоторые классические и, на первый взгляд, различные комбинаторные задачи. На самом деле они являются частными случаями общей проблемы. Цель предлагаемого цикла задач — рассказать об этой и близких проблемах.

Введем **определения**, которые пояснят связь между вышеприведенными??? задачами, а также помогут решить их. Рассмотрим множество U_n целых чисел от 1 до n. Обозначим через 2^{U_n} множество всех его подмножеств.

Алгеброй на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $\bar{A} := U_n - A$. Например, 2^{U_n} — алгебра на U_n; $\{\varnothing, \{1,2,3\}\}$ и $\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ — алгебры на U_3.

Базисом алгебры называется наименьшее (по включению) её подсемейство $\{X_1, \dots, X_k\}$ такое, что любой элемент алгебры можно выразить через $X_1 \dots X_k$ с помощью операций пересечения, объединения и дополнения. Задача 5а предыдущего раздела равносильна нахождению наименьшего числа множеств в базисе алгебры 2^{U_n}.

Задача А. 1) Найдите все алгебры на U_1, U_2 и U_3.

2) *Разбиением* множества U_n называется неупорядоченный набор $\{X_1, X_2, \dots X_k\}$ подмножеств $X_i \subset U_n$, для которого $U_n = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$. Установите взаимно-однозначное соответствие между алгебрами на U_n и разбиениями множества U_n.

3) Количество элементов произвольной алгебры есть степень двойки 2^k.

4) Размеры разных базисов одной алгебры могут быть различны.

Линейным пространством на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их симметрическую разность $A \oplus B$. Например, любая алгебра является линейным пространством; $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{1,2\}\}$, $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ и $\{\varnothing, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$ — линейные пространства на U_3. Определение *базиса* линейного пространства и его связь с задачей L предыдущего раздела аналогичны случаю алгебр.

Задача L. 1) Любое линейное пространство содержит $\emptyset$.

2) Найдите все линейные пространства на U_1, U_2 и U_3.

3) В линейном пространстве не может быть ровно 3 элемента.

4) Количество элементов произвольного линейного пространства есть степень двойки 2^k. Число k есть размер любого его базиса. Оно называется *размерностью* линейного пространства. В частности, размеры любых двух базисов данного линейного пространства одинаковы.

Топологией на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое содержит $\emptyset$, U_n и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A\cap B$, $A\cup B$. Например, любая алгебра является топологией; $\{\varnothing, \{1\}, \{1,2,3\}\}$ и $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\{1,2,3\}\}$ — топологии на U_3. Определение *базиса* топологии и его связь с задачей 5b предыдущего раздела аналогичны случаю алгебр.

Задача T. 1) Найдите все топологии на U_1, U_2 и U_3. Убедитесь, что существует топология, число элементов которой не является степенью двойки.

2) Любая ли топология является линейным пространством? Можно ли симметрическую разность выразить через пересечение и объединение?

Задача 2.* (a) Найдите рекуррентную формулу для числа $N_A(n)$ всех алгебр (числа Белла).

(l) Для числа $N_L(n)$ линейных пространств докажите $N_L(2n) \sim C \cdot 2^{n^2}$.

(t) Найдите количество топологий на n-элементном множестве (нерешенная задача).

Задача 3. *Цепью топологий* называется последовательность топологий $\{\varnothing, U_n\} = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \cdots \subsetneq A_k = 2^{U_n}$, между любыми двумя соседними членами которой нельзя вставить ещё одну топологию (т.е. для любого i не существует топологии B, для которой $A_i \subsetneq B \subsetneq A_{i+1}$). Аналогично определяются *цепи* алгебр и линейных пространств.

5.6.4. (a) Докажем эквивалентное утверждение: если общая часть каждого поднабора из k множеств из $\mathcal{F}$ имеет мощность не меньше s, то $|\mathcal{F}| \leqslant (k-1)^s$.
Двойная индукция по k, s. База: $k = 2$ или $s = 1$. Пусть k фиксировано, ведем индукцию по s. Рассмотрим множество $S \in \mathcal{F}$. Для $X \subseteq S$ обозначим через $\mathcal{F}_X$ семейство всех множеств, пересекающихся с S в точности по X. Тогда $\mathcal{F}$ есть непересекающееся объединение $\mathcal{F}_X$ по всем $X \subseteq S$. Для каждого $X \subseteq S$ по предположению индукции $|\mathcal{F}_X| \leqslant (k-2)^{s-|X|}$. Поэтому

$$|\mathcal{F}| \leqslant 1 + \sum_{X \subset S} (k-2)^{(s-|X|)} \leqslant \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (k-2)^{s-i} = (k-1)^s.$$

(b) Берём набор из $(k-1)^s$ множеств, построенный в решении задачи 5.6.2.b. В каждом из них s элементов. Общая часть любых k множеств имеет мощность не меньше s, так как в каждом из $(k-1)$-элементных множеств есть элемент, лежащий минимум в двух множествах из набора.

5.6.5. (a) Индукция по s. Для $s = 1$ семейство $\mathcal{F}$ состоит из как минимум k различных одноэлементных множеств. Поэтому база $s = 1$ очевидна. Пусть для $s - 1$ утверждение выполнено, докажем его для s. Если $\mathcal{F}$ не имеет с.о.п. размера меньше k, то само $\mathcal{F}$ является цветком с пустым ядром и k лепестками. Иначе существует с.о.п размера $k-1$. Тогда по крайней мере $|\mathcal{F}|/(k-1)$ множеств из $\mathcal{F}$ содержат некоторый элемент x.
Применим предположение индукции к $\mathcal{F}_x := \{S \setminus \{x\} \ : \ S \in \mathcal{F}, x \in S\}$. Получим, что $\mathcal{F}_x$ содержит цветок с k лепестками и некоторым ядром Y. Тогда изначальное семейство содержит цветок с таким же количеством лепестков и ядром $Y \cup \{x\}$.
(b) Берём набор из $(k-1)^s$ множеств, построенный в решении задачи 5.6.2.b. Для него элементы множества A_1 образуют с.о.п. Значит, размер минимальной с.о.п. не больше $k-1$.

5.7.1. *Решение.* (a) Пусть любые две комиссии имеют не более 20 общих членов. Дадим по конфете каждому участнику первой комиссии. Конфеты получат 2000 человек. Дадим по конфете каждому участнику второй, но первой, комиссии. Конфеты получат не менее 1980 человек. Дадим по конфете каждому участнику третьей, но не первой и ни второй, комиссий. Конфеты получат не менее 1960 человек. И так далее. Каждый парламентарий получит не более одной конфеты. В итоге количество парламентариев не меньше количества конфет, т.е. числа $100\cdot 2000-(100\cdot 99/2)\cdot 20=101\,000>100\,000$. Противоречие.

Это же решение можно изложить так. Пусть любые две комиссии имеют не более 20 общих членов. Тогда число всех парламентариев не меньше $100\cdot 2000-(100\cdot 99/2)\cdot 20=101\,000>100\,000$ (это неравенство Бонферрони 1.2.3.c, т.е. версия формулы включений-исключений). Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

(b) Примените рассуждение из п. (a) к декартову квадрату парламента, т.е. парламентом будет множество пар депутатов, а комиссиями множество пар депутатов из одной комиссии.

(c) То же для декартова куба.

(d) Найдите N такое, что $\dfrac{40}{\sqrt[N]{2}}>39$.

5.7.1. *Идея другого решения:* использовать версию теоремы Турана 2.7.2.d для $s=2$ и двудольного графа, в одной доле которого — парламентарии, а в другой — комиссии. Ср. [VS97].

5.7.2. (b) В противном случае

$$1\geqslant|E_0\cup E_1\cup\ldots\cup E_k|\geqslant\sum_{j=0}^{k}|E_j|-\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}|E_i\cap E_j|>1+\frac{1}{k}-\frac{k}{k^2}=1.$$

Противоречие.

(c) В j-е множество запишем все числа, в двоичной записи которых на j-м место стоит 0.

5.7.3. Аналогично задаче 5.7.1.

5.7.5. Перекладывание отрезков сохраняет хорошие подмножества и их длины.

Перекладывание отрезков является взаимно-однозначным соответствием. Итерация f^n с $n<0$ определена для взаимно-однозначных соответствий f: $f^n=f^{-1}\circ f^{-1}\circ\ldots\circ f^{-1}$ ($|n|$ раз).

(d) *При написании этого решения использован текст А. Пахарева.* Пусть, напротив, существовуют сколь угодно большие интервалы из целых чисел n, для которых $|E \cap f^n(E)| < 0.99|E|^2$. Назовем такие n и интервалы *плохими*. Обозначим через l_1 середину одного из плохих интервалов четной длины. Далее, обозначим через l_2 — середину плохого интервала четной длины, большей $|2l_1|$, и т.д. Тогда при любых $n > m$ число $l_n - l_m$ содержится в плохом интервале с серединой l_n, поэтому оно плохое. Значит, $|f^{l_n}(E) \cap f^{l_m}(E) < 0,99|E|^2$ для любых целых $n, m > 0$. Это противоречит лемме Виссера 5.7.3.b.

A.1. Все алгебры на U_2 нарисованы на рис. 1.a.

A.2. Разбиению $U_n = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ поставьте в соответствие семейство всех множеств, полученных объединением некоторых из $X_1, \dots, X_k$. На рис. 1.b нарисованы разбиения множества U_2, соответствующие алгебрам с рис 1.a.

A.3. Следует из задачи A.2.

A.4. Рассмотрите алгебру 2^{U_4} и два базиса, один из множеств $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$, другой из множеств $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

L.4. Докажите существование какого-либо базиса.

Введем определения, которые пояснят связь между различными пунктами *задач 2, 3, 4 и 5*, а также помогут решить их.

Нарисуем все алгебры (на U_n — эти слова мы дальше опускаем). Проведем стрелку от алгебры A к алгебре B, если $A \subsetneq B$ и между ними нельзя вставить никакую другую алгебру. Полученный граф называют *решёткой алгебр*. На рисунке нарисована решётка алгебр на U_3 (указаны разбиения, соответствующие алгебрам).

Разбиение $H = H_0 \sqcup H_1 \sqcup \dots \sqcup H_m$ множества всех алгебр называется *разбиением на этажи*, если для любых двух соединенных стрелкой алгебр $A \subset B$ номер этажа алгебры A на единицу меньше номера этажа алгебры B.

Ясно, что решётка алгебр допускает разбиение на этажи. (Какие алгебры находятся на k-м этаже?)

Аналогично случаю алгебр вводятся понятия *решётки линейных пространств* и ее *разбиения на этажи.* Ясно, что решётка линейных пространств допускает разбиение на этажи. (Какие линейные пространства находятся на k-м этаже?)

6.2 Независимость и доказательства существования

Введение

Цель этого раздела — продемонстрировать метод доказательства некоторых интересных комбинаторных результатов (пункты (b) задач 6.2.1-6.2.4 и задачи 6.2.16-6.2.26), заключающийся в применении локальной леммы Ловаса 6.2.15.b.

Следующие две части введения важны, но формально не используются далее.

Об открытии леммы Ловаса и ее роли в математике. Локальная лемма Ловаса была доказана в 1973 году выдающимся венгерским математиком Ласло Ловасом. Впрочем, тогда Ловасу было всего 25 лет и, хотя яркие результаты у него уже к тому времени были, все-таки на тот момент его воспринимали не как классика, но как восходящую звезду. Он уже был трехкратным победителем международных математических олимпиад (1964, 1965 и 1966 годов). Классиком Ловас станет позже, и весьма серьезную роль в этом сыграет доказанная им Локальная лемма. Разумеется, не только она: будет и топологический метод в комбинаторике, и мощные результаты в теории алгоритмов, и значительный вклад в науку о графовых пределах, и многое другое. Тем не менее, Локальная лемма — это замечательный инструмент вероятностной комбинаторики, благодаря которому были получены и продолжают получаться многочисленные яркие результаты в области дискретной математики и теории алгоритмов.

Работа, в которой Ловас формулирует и доказывает свою Локальную лемму, написана в соавторстве с Полом Эрдешем — еще одним великим специалистом по комбинаторике, основателем большой научной школы, автором множества задач и идей. Среди прочего, Эрдеш был одним из самых активных пропагандистов вероятностного метода в комбинаторике. Поэтому, несмотря на то, что Локальную лемму доказал именно Ловас, роль Эрдеша во всем этом не стоит недооценивать. В статье Эрдеша и Ловаса [EL] речь шла о раскрасках *гиперграфов* (т.е. наборов подмножеств конечного множества). Как раз ради доказательства существования некоторой раскраски Локальная лемма и придумывалась (т.е. ради обобщения задач 6.2.1, 6.2.16 и 6.2.17; не бойтесь, они формулируются и решаются без слова ‘гиперграф’). Однако очень быстро стало ясно, насколько это мощный и плодотворный инструмент. Например, почти сразу же с его помощью Дж. Спенсер улучшил нижнюю оценку *числа Рамсея* (см. определение в п. 4.1 и задачу 6.2.21), которая не поддавалась улучшению в течение сорока лет. Сейчас диапазон применения леммы становится все шире. Здесь теория графов и гиперграфов, здесь экстремальные задачи комбинаторики, теория алгоритмов и даже комбинаторная геометрия и теория диофантовых приближений.

За прошедшие десятилетия появились разнообразные усовершенствования Локальной леммы, многие из которых уже лишь отдаленно напоминают первоначальный вариант. И это еще одно свидетельство исключительной плодотворности идеи Ловаса.

Как устроено изложение в этом разделе. Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. Мы показываем, *как можно придумать* лемму Ловаса. Путь к ее доказательству и применениям намечен в виде задач (всех задач этого и следующего разделов, кроме задач 6.2.6 и 6.2.7, которые просто поясняют понятие независимости). Обучение путем решения задач не только характерно для серьезного изучения математики, но и продолжает древнюю культурную традицию. [4]

К важнейшим задачам приводятся указания и решения.

Обычно лемму Ловаса излагают на вероятностном языке. Однако, по нашему мнению, приводимое комбинаторное изложение более доступно и полезно для начинающего. Важно излагать вероятностные идеи (например, независимости) и развивать вероятностную интуицию, но при этом сохранять строгость изложения. Разумнее делать это, не определяя понятия вероятностного пространства. [5]

---

[4]Например, послушники дзенских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками. Впрочем, эти загадки являются скорее парадоксами, а не задачами. См. подробнее [S].

[5]Отличие элементарной теории вероятностей от перечислительной комбинаторики скорее в том, что речь идет о *долях* вместо чисел, и интерес часто представляют *оценки*, а не равенства.

Это как раз подготовит начинающего к введению этого довольно абстрактного понятия, ср. с [Z, философски-методическое отступление]. Кроме того, вероятностной интуиции начинающего противоречит получение вероятностными методами абсолютно (а не с некоторой вероятностью) верного результата. [6] (Впрочем, для человека, уже владеющего понятием вероятностного пространства, изложение на вероятностном языке не хуже комбинаторного.)

[6]Объяснять, как с помощью вероятностных методов можно получить абсолютно верный результат, лучше на более простых примерах. См., например, задачи 6.2.5, 6.2.10, 6.2.11 и 6.3.3.ab. Мы хотели бы сделать этот текст доступным даже для тех, кто не разбирал таких примеров.

Независимость и доказательства существования в комбинаторике

Приведем интересные факты, которые можно доказать при помощи леммы Ловаса и вряд ли можно доказать без нее! Видимо, из задач 6.2.1-6.2.4 вы сможете решить сейчас только пункты (a). К п. м (b) разумно вернуться после изучения следующего раздела. Более того, задача 6.2.2.b естественнее по формулировке, но сложнее двух следующих.

6.2.1. (a) По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные. Это задача 1.5.7.)

(b) По каждому из нескольких видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. (Теперь видов работ не обязательно 100.) Каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.

Замечание. Для каждого вида работ x обозначим через A_x множество распределений выходных, при которых и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Нужно доказать, что $\cap_x A_x \neq \varnothing$. В п. (a) это делается путем подсчета количества элементов. В п. (b) этого уже не хватает, нужна идея из следующего раздела. Там мы покажем, как *независимость* (определенную там) можно применять для оценки количества элементов в пересечении множеств.

Описанную идею можно сформулировать так. Нужное условие мы представляем в виде пересечения некоторого числа условий. При этом ясно, что для каждого из них есть конструкция, ему удовлетворяющая. Иногда отсюда можно вывести, что есть конструкция, удовлетворяющая всем этим условиям одновременно! Эта идея часто применяется в математике. (Для читателя, знакомого с соответствующими понятиями, напомним, что в анализе так доказывается существование решения дифференциального уравнения, в топологии — вложимость n-мерного компакта в $\mathbb{R}^{2n+1}$, ср. [S6, §2].) Число условий может быть бесконечно, поэтому идея пересечения ‘равносильна’ идее итерационного процесса. А в настоящей заметке мы покажем, как применять эту идею в комбинаторике. Несмотря на конечность числа условий, ее применение весьма нетривиально.

6.2.2. (a) По кругу стоит 200 студентов из 10 групп, в каждой из которых 20 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

(b) То же для 1600 студентов из 100 групп, в каждой из которых 16 студентов.

6.2.3. (a) Докажите, что можно раскрасить первые 8 натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 3. (Это задача 4.4.5.b.)

(b) Докажите, что можно раскрасить первые 15 миллионов натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 32.

6.2.4. (a) Докажите, что для любого $M \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 2 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ числа x и $x+M$ были не одного цвета.

(b) Докажите, что для любых 25 чисел $M_1, \dots, M_{25} \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ среди чисел $x, x+M_1, \dots, x+M_{25}$ были числа каждого из трех цветов.

Решения пунктов (b) вышеприведенных задач основаны на идее, аналогичной решению задачи 6.2.1.b.

Независимость

Приведем задачи, которые подведут нас к лемме Ловаса 6.2.15.b (почему она интересна, написано в предыдущем разделе).

6.2.5. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т.е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдется богатый здоровый горожанин?

Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M.

6.2.6. Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)

(a) В множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трех ее строках и подмножество клеток в последних четырех ее столбцах.

(b) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

(c) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

6.2.7. Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

(a) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

(b) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

(c) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

(d) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

6.2.8. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1.b.) Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $1, 2, \ldots, 400$ в два цвета?

(a) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ одноцветно.

(b) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ неодноцветно (ср. с задачей 6.2.1.b).

(c) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \ldots, 13\}$ одноцветно.

6.2.9. Подмножества A и B конечного множества независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B}$ независимы.

6.2.10. (a) В городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$. Обязательно ли найдется богатый здоровый умный горожанин?

(b) Тот же вопрос, если в городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин, богатство, здоровье и ум попарно независимы, и доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется *независимостью в совокупности*.)

(c) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

(d) В городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$. Богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Может ли доля богатых здоровых умных быть меньше $1/5$?

Задача 6.2.10 показывает, что чем сильнее условие, характеризующее независимость нескольких множеств, тем меньшей доли каждого множества достаточно, чтобы гарантировать непустоту пересечения. Причем наиболее интересные результаты (6.2.10.cde) получаются «посередине» между крайними условиями — полного отсутствия независимости (6.2.10.a) и независимости в совокупности (6.2.10.b). Так часто бывает: наиболее полезные соображения находятся между «крайними» точками зрения.

6.2.11. (a) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества 720-элементного множества, в каждом из которых более 480 элементов. Если A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, 3$, то $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.

(b)* Пусть $n \geqslant 2$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $1 - \dfrac{1}{n-1}$. Если A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$.

Подробнее о независимости см. [KZP].

Лемма Ловаса

Для леммы Ловаса нужно еще более «хитрое» условие независимости на несколько множеств, чем рассмотренные ранее.

6.2.12. Приведите пример подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества:

(a) попарно независимых, но для которых A не является независимым от $B_1 \cap B_2$;

(b) не являющихся попарно независимыми, но для которых A независимо и от B_1, и от B_2, и от $B_1 \cap B_2$.

6.2.13. Обозначим через M семейство всех раскрасок множества $[400] := \{1, 2, \ldots, 400\}$ в два цвета. Для подмножества $\alpha \subset [400]$ обозначим через $A_\alpha \subset M$ подмножество тех раскрасок, для которых α одноцветно. Тогда для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \subset \{9, 10, \ldots, 400\}$ подмножество $A_{[8]}$ не зависит от пересечения $A_{\alpha_1} \cap \ldots \cap A_{\alpha_n}$. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1.b.)

6.2.14.

6.2.15. (a) **Локальная лемма Ловаса в симметричной форме.** *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества. Пусть для некоторого d и любого k*

- *доля подмножества A_k не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$, и*
- *если из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вычеркнуть не менее d любых множеств, среди которых есть A_k, то пересечение оставшихся множеств будет независимо с A_k.*

Тогда $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \varnothing$. [7]

(b) При $d > 2$ утверждение п. (a) верно, если заменить $1 - \dfrac{1}{4d}$ на $1 - \dfrac{1}{e(d+1)}$, где e — основание натуральных логарифмов.

(c) Если $a_k = 1$ при любом $k \leqslant 0$ и для некоторого $d \geqslant 2$ выполнено $a_{k+1} \geqslant a_k - \dfrac{a_{k-d}}{4d}$ при любом $k \geqslant 0$, то $a_k > 0$ при любом k.

Читатель может перед доказательством этой леммы применить ее к решению задачи 6.2.1.b. Доказательство леммы нетривиально обобщает идеи решения задач 6.2.10, 6.2.11 и 6.2.14. Из этих задач ясно, что нужно оценивать снизу количество элементов в пересечении s из данных множеств, начиная с $s = 1$ и заканчивая $s = n$, при помощи индукции по s. Как часто бывает, наиболее трудная часть — догадаться, какое конкретно утверждение нужно доказывать по индукции.

Подмножество A конечного множества M называется *независимым от набора подмножеств* $B_1, \dots, B_k \subset M$, если A независимо с любым подмножеством, являющимся пересечением нескольких (возможно, одного) множеств из $B_1, \dots, B_k$.

---

[7] Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство и* $A_1, \dots, A_n$ *— события. Пусть для некоторого* d *и любого* k *вероятность события* A_k *не меньше* $1 - \frac{1}{4d}$ *и существует набор из не менее чем* $n - d$ *событий* A_j*, от которого* A_k *не зависит. Тогда вероятность события* $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ *положительна.*

Указания и решения к задачам 6.2.1-6.2.15 (кроме 6.2.2.b, 6.2.3.b и 6.2.4.b)

6.2.1. (a) См. указание к задаче 1.5.7.

(b) Обозначим через A множество распределений выходных. Для каждого вида работ x обозначим через $\widehat{x}$ множество специалистов по нему, а через A_x — множество распределений выходных, при которых и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Тогда $|A_x|/|A| = 2^{-7}$. Подмножество A_x не зависит от набора $\{A_y \mid \widehat{y} \cap \widehat{x} = \varnothing\}$. Так как каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами, то вне этого набора не более 30 подмножеств. Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15.b) к дополнениям множеств A_x и $d = 2^5$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9 и неравенства $30 < 2^5$. Получим $\cap_x \overline{A_x} \neq \varnothing$.

6.2.2. (a) Выберем произвольного студента произвольной группы и назначим его старостой. Далее действуем так: на каждом шаге выбираем из группы, в которой еще не выбран староста, студента, не являющегося соседом никакого выбранного старосты. Так как выбранных старост не больше 9, то соседей у выбранных старост не больше 18. Следовательно, на каждом шаге мы можем найти нужного студента. В итоге получим 10 человек из разных групп, никакие два из которых не являются соседями.

6.2.4. (a) Покрасим каждое число $x \in \mathbb{R}$ в четность числа $[x/M]$, т.е. в черный цвет, если число $[x/M]$ четно, и в нечерный цвет, если оно нечетно.

6.2.6. Ответы: (a,b) независимы, (c) зависимы.

6.2.7. Ответы: (a) независимы, (b,c,d) зависимы.

6.2.8. Ответы: (a,b) независимы, (c) зависимы.

6.2.10. (c) Забудьте про глупых людей!

Приведем более сложное решение. Зато оно подводит к п. (d) и лемме Ловаса. Обозначим через У,Б,З множества умных, богатых и здоровых горожан. Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Тогда УБ $>$ У$/2 <$ УЗ. Значит,

$$\text{УБЗ} = \text{УБ} - \text{УБ}\overline{\text{З}} > \frac{\text{У}}{2} - \text{У}\overline{\text{З}} > (\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2})\text{У} = 0.$$

Замечание. Для решения задачи достаточно наличия одного умного человека. Не обязательно, чтобы умных было большинство.

6.2.11. (a) Аналогично решению задачи 6.2.10.d $A_1A_2A_3 > A_2/3$.

(b) Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Не уменьшая общности, $A_2 \geqslant A_3$. Тогда аналогично п. (b) $A_1A_2A_3 > A_2/3$. Поэтому

$$A_1A_2A_3A_4 = A_1A_2A_3 - A_1A_2A_3\overline{A_4} > (A_2/3) - A_3\overline{A_4} > (A_2 - A_3)/3 \geqslant 0.$$

(c) Решение не было известно авторам заметки [IRS] на момент публикации. Оно предложено А. Ляховцом, А. Матушкиным и О. Орел [Ma].

6.2.12. (a) Возьмем в качестве A, B_1 и B_2 диагональ, первую горизонталь и первую вертикаль таблицы (скажем, 2×2).

Следующее более формальное и полное изложение решения написано В. Немычниковой. Возьмем

$$M := \{1,2,3,4\}, \quad A := \{1,4\}, \quad B_1 := \{2,4\} \quad \text{и} \quad B_2 := \{3,4\}.$$

Тогда A, B_1, B_2 попарно независимы, ибо

$$4 = |M||A \cap B_1| = |A||B_1| = |M||A \cap B_2| = |A||B_2| = |M||B_2 \cap B_1| = |B_2||B_1|.$$

Но A зависимо от набора B_1, B_2, ибо $|M||A \cap B_1 \cap B_2| = 4 \neq |A||B_1 \cap B_2|$.

(b) Можно взять A, независимое с $B_1 = B_2$. Или A, независимое с B_1 и с B_2, причем $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Следующее более формальное и полное изложение решения написано В. Немычниковой. Возьмем

$$M := \{1,2,3,4\}, \quad A := \{2,3\}, \quad B_1 := \{1,2\} \quad \text{и} \quad B_2 := \{3,4\}.$$

Тогда A независимо от набора B_1, B_2, ибо

$$|M||A \cap B_1| = |A||B_1| = 4 = |M||A \cap B_2| = |A||B_2| = 4$$

$$\text{и} \quad |M||A \cap B_1 \cap B_2| = 0 = |A||B_1 \cap B_2|.$$

Но B_1 и B_2 зависимы, ибо $|M||B_2 \cap B_1| = 0 \neq |B_2||B_1|$.

6.2.15. (a) При написании этого решения, по сути принадлежащего Ловасу, использован текст А. Ремизовой, подготовленный в ходе обсуждений на семинарах по дискретному анализу на ФИВТ МФТИ. Обозначим $X_k := A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n$. Тогда X_{n+1} — данное конечное множество. Достаточно доказать, что

$$(I) \qquad |X_1| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2d}\right)|X_2| \quad \text{для любого} \quad n.$$

Из этого будет вытекать, что $|X_1| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2d}\right)^{n-1}|X_n| > 0$.

Так как $|X_1| = |X_2| - |\overline{A_1} \cap X_2|$, то утверждение (I) равносильно утверждению

$$(I') \qquad |\overline{A_1} \cap X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2| \quad \text{для любого} \quad n.$$

Докажем последнее при помощи индукции по n. База индукции $n = 1$ вытекает из

$$|\overline{A_1}| = |X_2| - |A_1| \leqslant \frac{1}{4d}|X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2|.$$

Докажем шаг индукции. Пусть утверждение (I') верно для $n-1 \geqslant 1$. Без ограничения общности, будем считать, что A_1 не зависит от X_{d+1}. Тогда и $\overline{A_1}$ не зависит от X_{d+1}. Поэтому

$$|\overline{A_1} \cap X_2| \leqslant |\overline{A_1} \cap X_{d+1}| \leqslant \frac{1}{4d}|X_{d+1}|.$$

Значит,

$$|X_2| = |X_{d+1}| - \left|\left(\bigcup_{j=2}^{d} \overline{A_j}\right) \cap X_{d+1}\right| \geqslant |X_{d+1}| - \sum_{j=2}^{d} |\overline{A_j} \cap X_{d+1}| \underset{(*)}{\geqslant}$$

$$\underset{(*)}{\geqslant} \left(1 - \frac{d-1}{2d}\right)|X_{d+1}| > \frac{1}{2}|X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A_1} \cap X_2|.$$

Здесь неравенство (*) получено применением предположения индукции к каждой из систем подмножеств $A_j, A_{d+1}, A_{d+2}, \ldots, A_n$, где $j \in \{2, 3, \ldots, d\}$.

6.2.15. (a) Другое решение. Можно считать, что $d > 1$, иначе утверждение очевидно. По условию существует $X \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $|X| \geqslant n - d$ и A_{k+1} не зависит от набора $\{A_j \ : \ j \in X\}$. Тогда

$$|\{1, 2, \ldots, k\} - X| \leqslant n - |X| \leqslant n - (n - d) = d.$$

Поэтому можно считать, что A_{k+1} не зависит от набора $A_1, A_2, \ldots, A_{k-d}$ (при $k \leqslant d$ этот набор пуст). Обозначим $A_{1,2,\ldots,m} := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$. Тогда

$$|A_{1,2,\ldots,k+1}| - |A_{1,2,\ldots,k}| = -|\overline{A_{k+1}} \cap A_{1,2,\ldots,k}| \overset{(1)}{\geqslant} -|\overline{A_{k+1}} \cap A_{1,2,\ldots,k-d}| \overset{(2)}{\geqslant}$$

$$\overset{(2)}{\geqslant} -\frac{|A_{1,2,\ldots,k-d}|}{4d}, \quad \text{где}$$

• при $k \leqslant d$ по определению считаем, что $A_{1,2,\ldots,k-d}$ есть то данное в условии множество, подмножествами которого являются $A_1, \ldots, A_n$;

• первое неравенство справедливо ввиду $A_{1,2,\ldots,k} \subset A_{1,2,\ldots,k-d}$;

• второе — ввиду того, что доля подмножества A_{k+1} не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$ и, при $k > d$, ввиду независимости $\overline{A_{k+1}}$ от набора $A_1, A_2, \ldots, A_{k-d}$ (см. задачу 6.2.9).

Для подмножества $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ обозначим $a_X := |A_{x_1,\ldots,x_k}|$. Мы доказали, что для любых k-элементного подмножества $X \subset \{1, \ldots, n\}$ и $x \in \{1, \ldots, n\} - X$ существует такое $(k - d)$-элементное подмножество $Y \subset X$ (пустое при $k \leqslant d$), что $a_{X \cup \{x\}} \geqslant a_X - \dfrac{a_Y}{4d}$. Из этого выводится, что $a_{X \cup Y} \geqslant \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{|Y|} a_X$ для любых непересекающихся множеств $X, Y \subset \{1, \ldots, n\}$. Выводится при помощи индукции по паре $(|X| + |Y|, |Y|)$ аналогично п. (c).

(c) Достаточно доказать для любых $k, t \geqslant 0$ неравенство

$$I(k + t, t): \qquad a_{k+t} \geqslant a_k \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t.$$

Утверждение задачи получается из $I(t, t)$. Докажем неравенство

$I(k+t,t)$ индукцией по паре [8] (s,t), где $s=k+t$. База $s=k+t=t=0$ очевидна.

Докажем шаг, т.е. докажем неравенство $I(k+t,t)$, предполагая выполненным неравенство $I(k'+t',t')$ для всех пар $(k'+t',t')$, лексикографически меньших, чем пара $(k+t,t)$. Тогда $k+t>0$. Случай $t=0$ очевиден. Пусть теперь $t>0$.

Случай $t>1$ сводится к последовательному применению неравенств $I(k+t,1)$ и $I(k+t-1,t-1)$:

$$a_{k+t} \geqslant a_{k+t-1}\left(1-\frac{1}{d}\right) \geqslant a_k\left(1-\frac{1}{d}\right)^{1+t-1} = a_k\left(1-\frac{1}{d}\right)^t.$$

Пусть $t=1$. Тогда

$$a_{k+1} \geqslant a_k - \frac{a_{k-d}}{4d} \overset{(2)}{\geqslant} a_k - \frac{a_k}{4d(1-\frac{1}{d})^d} \overset{(3)}{\geqslant} a_k\left(1-\frac{1}{d}\right), \quad \text{где}$$

• второе неравенство получается из $I(k,d)$ и верно по предположению индукции;

• третье неравенство справедливо ввиду $\left(1-\dfrac{1}{d}\right)^d \geqslant \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

См. другое решение в [SVY].

Указания и решения к задачам 6.2.2.b, 6.2.3.b и 6.2.4.b

6.2.2. (b) Обозначим через A семейство подмножеств из 100 студентов, в которых по одному студенту из каждой группы. Для любого студента x обозначим через A_x семейство подмножеств из A, содержащих и студента x, и следующего за ним по часовой стрелке студента x_+.

Если x и x_+ одногруппники, то A_x пусто. Иначе $|A_x|/|A| = 1/256$. Итак, всегда $|A_x|/|A| \leqslant 1/256$.

[8] Подумайте, почему не проходит индукция по паре (k,t) или по $s+t=k+2t$, а также зачем рассматривать $k>0$, если утверждение задачи вытекает из случая $k=0$.

Множество A_x не зависит от набора α_x всех тех A_y, для которых ни один из студентов y, y_+ не является одногруппником ни со студентом x, ни со студентом x_+. (Т.е. $\alpha_x := \{A_y \mid \{y, y_+\} \cap (\widehat{x} \cup \widehat{x_+}) = \varnothing\}$, где $\widehat{z}$ — группа студента z.) Семейство A_z не входит в набор α_x тогда и только тогда, когда один из студентов z, z_+ является одногруппником с одним из студентов x, x_+. Тех z, которые являются одногруппниками для x, ровно 16. Аналогичное верно с заменой пары (x, z) на любую из пар (x_+, z), (x, z_+), (x_+, z_+). Поэтому количество студентов z, для которых $A_z \notin \alpha_x$, не больше $16 \cdot 4 = 64$.

Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15.b) к дополнениям множеств A_x и $d = 64$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9 и равенства $4 \cdot 64 = 256$. Получим $\cap_x \overline{A_x} \neq \varnothing$.

Замечание. Необычно, что при решении этой задачи вместо «увеличения симметрии» (т. е. рассмотрения подмножеств, в которых есть студент, стоящий рядом с x) полезно «уменьшить симметрию» (т. е. рассмотреть подмножества, в которых есть студент, следующий за x по часовой стрелке).

6.2.3. (b) Положим $n := 15 \cdot 10^6$. Обозначим через A семейство раскрасок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 2 цвета. Для любой 32-элементной арифметической прогрессии $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через A_α семейство раскрасок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 2 цвета, для которых α одноцветна. Тогда $|A_\alpha|/|A| = 2^{-31}$. Подмножество A_α не зависит от набора $\{A_\beta \mid \beta \cap \alpha = \varnothing\}$. Каждую 32-элементную арифметическую прогрессию в $\{1, 2, \ldots, n\}$ пересекает не более $32^2[n/31] < 2^{10}2^{19} = 2^{29}$ других таких прогрессий (докажите!). Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15.b) к дополнениям множеств A_α и $d = 2^{29}$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9. Получим $\cap_\alpha \overline{A_\alpha} \neq \varnothing$.

6.2.4. (b) Сначала докажем следующий более слабый факт.

Для любых 25 различных чисел $M_1, \ldots, M_{25} \in \mathbb{R}$ и конечного множества $X \subset \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in X$ среди чисел $x, x+M_1, \ldots, x+M_{25}$ были числа каждого цвета.

Обозначим через A семейство раскрасок множества $X \cup (M_1 + X) \cup \cdots \cup (M_{25} + X)$ в 3 цвета. Для любого $x \in X$ обозначим через $A_x \subset A$ подсемейство раскрасок, для которых среди цветов чисел $x, x+M_1, \ldots, x+M_{25}$ не все цвета присутствуют. Тогда $|A_x|/|A| \leqslant 3(2/3)^{26}$. Каждое множество A_x 'зависимо не более чем с $25 \cdot 26 = 650$ другими' (т.е. независимо от набора всех множеств, кроме некоторых 650). Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15.b) к дополнениям множеств A_x и $d = 650$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9 и неравенства $(3/2)^{26} > 2^{13} > 8000 > 7800 = 3 \cdot 2600 = 3 \cdot 4 \cdot 650$. Получим $\cap_x \overline{A_x} \neq \varnothing$. QED

Теперь при помощи *соображений компактности* выведем из этого факта его аналог для бесконечного X, в частности, для $X = \mathbb{R}$ [AS, §5.2]. (Оставшаяся часть решения написана с использованием текста А. Волостнова.)

Назовём раскраску в 3 цвета множества X *радужной*, если для любого числа $x \in X$ такого, что $x+M_1, \ldots, x+M_{25} \in X$, среди чисел $x, x+M_1, \ldots, x+M_{25} \in X$ есть числа каждого из трех цветов.

Введем на множестве действительных чисел следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y = k_1M_1 + \ldots + k_{25}M_{25}$ для некоторых целых $k_1, \ldots, k_{25}$. (Эту эквивалентность можно назвать 'сравнимостью по модулю $\gcd(M_1, \ldots, M_{25})$'.) Ясно, что числа $x, x+M_1, \ldots, x+M_{25}$ принадлежат одному классу эквивалентности. Следовательно, для решения задачи достаточно доказать существование радужной раскраски каждого класса эквивалентности.

Возьмем любое $a \in \mathbb{R}$. Тогда его класс эквивалентности

$$[a] = \{a + k_1M_1 + \ldots + k_{25}M_{25} \ : \ k_1, \ldots, k_{25} \in \mathbb{Z}\}.$$

Для каждого целого $n \geqslant 0$ обозначим

$$[a]_n = \{a+k_1M_1+\ldots+k_{25}M_{25} \ : \ k_1, \ldots, k_{25} \in \mathbb{Z}, \ |k_1+\ldots+k_{25}| < n\}.$$

Очевидно, что

$$\varnothing = [a]_0 \subset [a]_1 \subset \ldots \subset [a]_n \subset \ldots \subset [a] = \bigcup_{i=0}^{\infty} [a]_i.$$

Достаточно доказать, что существует бесконечное семейство $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ радужных раскрасок множеств $[a]_0, [a]_1, \ldots, [a]_n, \ldots$, каждая раскраска τ_n из которых является продолжением раскраски τ_{n-1}. Тогда правильная раскраска множества $[a]$ получится ‘объединением’ всех раскрасок τ_n.

Докажем существование такого семейства $\{\tau_n\}$. Раскраска множества $[a]_0 = \emptyset$ тривиальна. Предположим, что раскраска τ_{n-1} построена (тем самым, построены и $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-2}$), причем для любого натурального $m \geqslant n$ существует правильная раскраска множества $[a]_m$, продолжающая раскраску τ_{n-1}. Так как множество $[a]_n$ конечно, то по доказанному факту его можно радужно раскрасить. Кроме того, любая радужная раскраска множества $[a]_n$ является продолжением некоторой радужной раскраски множества $[a]_{n-1}$. Поэтому раскраску τ_{n-1} можно конечным числом способов $\tau_n^1, \ldots, \tau_n^k$ продолжить до радужной раскраски множества $[a]_n$.

Предположим, что для любого $i = 1, \ldots, k$ существует $m_i > n$ такое, что ни одна из правильных раскрасок множества $[a]_{m_i}$ не является продолжением раскраски τ_n^i. Обозначим $m := \max\{m_1, \ldots, m_k\}$. Тогда ни одна из правильных раскрасок τ множества $[a]_m$ не является продолжением ни одной из раскрасок τ_n^i. Значит, τ не является продолжением раскраски τ_{n-1}. Противоречие.

Поэтому существует $i = 1, \ldots, k$ такое, что для любого натурального $m > n$ существует правильная раскраска множества $[a]_m$, продолжающая раскраску τ_n^i. Положим $\tau_n := \tau_n^i$. Поскольку при определении раскраски τ_n не менялись раскраски $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$, то так получается нужное бесконечное семейство раскрасок.

7 Алгебраические методы

7.1 Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

Напомним, что для множества F

$$F^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ : \ a_1, a_2, \ldots, a_n \in F\}.$$

Элементы этого множества называются *векторами* (или *наборами* или *точками*). Если $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то векторы можно покомпонентно складывать:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Если $F \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то вектор можно покомпонентно умножить на число $\lambda \in F$:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

(Это можно делать и для $F = \mathbb{Z}_2$, но не интересно.)

7.1.1. *Теорема о линейной зависимости.*

($\mathbb{Z}_2$) Среди любых $n+1$ наборов длины n из нулей и единиц найдется несколько (не ноль) наборов, покомпонентная сумма по модулю два которых есть нулевой набор.

($\mathbb{Q}$) Для любых $n+1$ векторов $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{Q}^n$ найдутся рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (0, \ldots, 0)$.

($\mathbb{R}$) Аналог теоремы ($\mathbb{Q}$) справедлив для вещественных, комплексных и целых чисел.

Наборы из задач 7.1.1.($\mathbb{Z}_2$),($\mathbb{Q}$) называются *линейно зависимыми* — над $\mathbb{Z}_2$ и над $\mathbb{Q}$ соответственно. *Линейная независимость* — отрицание *линейной зависимости.* Аналогично определяется линейная (не)зависимость многочленов над $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Q}$ соответственно. (Эти и следующие понятия используются в формулировках задач 7.1.4.c, 7.1.5.c, 7.1.7.b и в решениях некоторых задач.)

Для $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ *скалярное произведение* $F^n \times F^n \to F$ определяется формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Векторы $x, y \in F^n$ называются *ортогональными*, если $x \cdot y = 0$.

Расстояние между точками пространства $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$|(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Линейным подпространством называется подмножество $L \subset \mathbb{Q}^n$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на рациональные числа. Линейное подпространство L называется *n-мерным*, если найдутся такие линейно независимые векторы $v_1, \ldots, v_n \in L$, что любой вектор $v \in L$ линейно выражается через данные векторы, т. е. найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, для которых $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Число n называют *размерностью* пространства L. Ср. с определением перед задачей 1.4.7.

Замечание. Аналогичные определения можно дать и в более общей ситуации — это приводит к понятию *кольца* и *модуля* над ним. Попытка доказать (и использовать!) аналог теоремы о линейной зависимости (задачи 7.1.1) приводит к понятиям *поля* и *линейного пространства* над ним. (Для случая целых чисел уже не все обобщения проходят.) Подробности можно найти в учебнике по линейной алгебре.

Фраза «N элементов» (в частности, подмножеств) означает «N попарно различных элементов» (в частности, подмножеств).

7.1.2. Дано семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(a) Если в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ нечётное число элементов, а в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ чётное число элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(b) Постройте пример, когда эта оценка достигается.

(c) Если в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов и в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ более q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(d) Если $q > 0$ и в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

7.1.3. (a) Существуют 2^k подмножеств $2k$-элементного множества, в каждом из которых чётное число элементов и в пересечении любых двух из которых чётное число элементов.

(b) Больше, чем 2^k подмножеств, в условиях п. (a) быть не может.

7.1.4. (a) Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.
(b) Для $a \in \mathbb{R}$ и точек $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $P_v(x) := |x - v|^2 - a^2$. Если попарные расстояния между k точками $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ равны a, то многочлены $P_{u_1}, \ldots, P_{u_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.
(c) Постройте $n(n-1)/2$ точек в $\mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми принимают только два различных значения.
(d) Если попарные расстояния между k точками в $\mathbb{R}^n$ принимают только два различных значения, то $k \leqslant (n+1)(n+4)/2$.

7.1.5. (a) Среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.
(b) Для $n, k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$V_{n,k} := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \ : \ \sum_s x_s = k \right\}.$$

Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, скалярное произведение которых делится на 3.
(c) Для любого $\vec{a} \in V_{25,9}$ раскроем скобки в произведении

$$(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}))^2 - 1$$

по модулю 3, где $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — переменные. Каждый из полученных одночленов λx_i^2 заменим на λx_i. Полученный многочлен (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_3$) обозначим $F_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_{25})$.
Докажите, что если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in V_{25,9}$ не делится на 3, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \ldots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_3$.
(d) Укажите 326 многочленов, линейными комбинациями которых с рациональными коэффициентами можно получить каждый многочлен $F_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in V_{25,9}$.

7.1.6. (a) Среди любых 107 пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента.

(b) То же для 93 подмножеств.
(c) То же для 92 подмножеств.
(d) Невозможно раскрасить в 21 цвет все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества так, чтобы любые два пятиэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по двум элементам, были разноцветны.
(Ср. с замечанием в задаче 5.1.4. Вот эквивалентная формулировка. Вершинами графа являются все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества. Его ребрами являются пары подмножеств, пересекающиеся ровно по двум элементам. Докажите, что этот граф нельзя правильно раскрасить в 21 цвет.)

7.1.7. Обозначим $G(t) := (t-1)(t-2)\dots(t-p+1)$.
(a) Для простого p и целого t число $G(t)$ делится на p тогда и только тогда, когда t не делится на p.
(b) Пусть p простое и $n = 4p$. Обозначим

$$M = \{(1, y_2, y_3 \dots, y_n) \ :$$

$$: \ y_k \in \{1, -1\} \text{ и среди } y_2, \dots, y_n \text{ число минус единиц чётно}\}.$$

Для любого $\vec{a} \in M$ раскроем скобки в произведении $G(\vec{a}\cdot(1, x_2, \dots, x_n))$ по модулю p, где $x_2, \dots, x_n$ — переменные. В каждом из полученных одночленов для каждого i будем заменять x_i^2 на 1, пока это возможно. Полученный многочлен обозначим $F_{\vec{a}}(x_2, \dots, x_n)$.
Докажите, что если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s \in M$ не равно нулю, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \dots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_p$.
(c) Существуют n и ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, которое невозможно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.

7.1.8. (a) *Теорема Франкла-Уилсона.* Если p простое и $n > k$ целые, то среди любых различных $1+\sum\limits_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых k-элементов, найдутся два подмножества, число элементов в пересечении которых делится на p.

(b) То же, только задано целое a и «делится на p» заменено на «сравнимо с a по модулю p».

(c) *Теорема Фрэнкла-Вильсона.* Пусть $p > 2$ простое и в множестве из $n = 4p^\alpha$ элементов выбрано $\binom{n-1}{n/4-1}$ подмножеств по $n/2$ эдементов в каждом. Тогда найдутся два множества, имеющие ровно $n/4$ общих элементов.

7.1.9. (a) Если множество рёбер графа K_n является объединением множеств рёбер s полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n - 1$.
(b) Постройте набор двудольных графов, на котором эта оценка достигается.

Ср. с п. 5.1 и 5.7. Более подробное и развернутое изложение можно найти в [M, R1], а более продвинутое — в [B].

7.2 Матрицы Адамара

7.2.1. *Теорема Адамара.* Если у матрицы A размера $n \times n$ каждый элемент по модулю не превосходит 1, то $|\det A| \leqslant n^{n/2}$.

Квадратная матрица H называется *матрицей Адамара*, если все её элементы равны ± 1 и $H \cdot H^T = nE_n$, где n — порядок матрицы H и E_n — единичная матрица.

7.2.2. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для $n =$
(2) 2; (4) 4; (8) 8; (16) 16; (12) 12.

7.2.3. (a) У матрицы Адамара любые два столбца ортогональны.
(b) Матрица является матрицей Адамара тогда и только тогда, когда её элементы равны ± 1 и любые две строки ортогональны.
(c) Для матриц Адамара достигается верхняя оценка в теореме Адамара. (Название матрицы Адамара получили благодаря этому результату.)
(d) Если существует матрица Адамара $n \times n$ и $n > 2$, то n делится на 4.

Гипотеза. Матрица Адамара $n \times n$ существует для любого числа n, делящегося на 4.

Гипотеза не доказана даже для некоторых чисел, меньших 1000; а именно, для 668, 716, 892.

Для решения двух следующих задач потребуются простейшие свойства квадратичных вычетов; см. [O, §9], [Vi, §5], [ZSS, 3.3].

7.2.4. Для простого числа p обозначим $S_d = S_{p,d} := \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_p} \left(\dfrac{j(j+d)}{p}\right)$ (это сумма символов Лежандра).

(a) Докажите, что S_d не зависит от $d \neq 0$.

(b) Найдите S_d для каждого $d \in \mathbb{Z}_p$.

7.2.5. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для n, равного

(2a) $2a$, если существует матрица Адамара $a \times a$;

(ab) ab, если существуют матрицы Адамара $a \times a$ и $b \times b$;

(4k) $p+1$, где p — простое число вида $4k-1$;

(8k+4) $2p+2$, где p — простое число вида $4k+1$.

Матрица Адамара называется *нормализованной*, если у неё первая строчка и первый столбец состоят из одних единиц.

7.2.6. Нарисуйте все нормализованные матрицы Адамара порядков 1; 2; 4.

7.2.7. Адамаровость матрицы сохраняется при следующих преобразованиях:

(1) умножение строчки или столбца на -1;

(2) перестановка строчек или столбцов местами.

Матрицы Адамара, получаемые друг их друга применением некоторого числа преобразований (1) и (2), называются *эквивалентными*.

7.2.8. (a) Какие из матриц из задачи 7.2.6 эквивалентны?
(b) Любая матрица Адамара эквивалентна некоторой нормализованной.

Количество классов эквивалентности: для порядков 1,2,4,8,12 — 1, 16 — 5, 20 — 3, 24 — 60, 28 — 487, 32 — больше миллиона.

7.2.9. Для любых ли матриц Адамара H и H' матрицы $H \otimes H'$ и $H' \otimes H$ эквивалентны? Здесь тензорное произведение $\otimes$ определено в указании к задаче 7.2.5.(ab).

[G] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[GIF] *С. А. Генкин, И. В. Итенберг и Д. В. Фомин*, Ленинградские математические кружки, Киров, 1994.

[GKP] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник А.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

[Har] *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС, 2003.

[Hal] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[IRS] *Ильинский Д., Райгородский А., Скопенков А.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике. Мат. Просвещение, 19 (2015). `http://arxiv.org/abs/1411.3171`

[IKRS] *Ильинский Д., Купавский А., Райгородский А., Скопенков А.* Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач). Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 162–181. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros/matprosi.html`

[I] *Игнатьев М.В.* Квантовая комбинаторика. Мат. Просвещение. 18 (2014), с. 66–111. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros/mpi.pdf`

[Ja] *Janson S., Luczak T., Rucinski A.* Random Graphs. John Wiley, 2000.

[J] *Jukna S.* Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science. Springer-Verlag, XVII (2001).

[K] *Калужнин Л. А., Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки. М.: Физматлит, 1985.

[KZP] *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.,* Введение в теорию вероятностей. Серия «Библиотечка «Квант» », выпуск 23. М.: Наука, 1982.
URL: http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/teorver.htm

[KR] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001. `http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.htm`

[L] *Lovász L.* Combinatorial Problems and Exercises. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[M] *J. Matoušek.* Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, Amer. Math. Soc., 2010

[Ma] *А. Матушкин,* Непустота пересечения цепочки множеств, Мат. Просвещение, представлено к публикации.

[Mo] *B. Mohar,* 2-cell embeddings with prescribed face lengths and genus, Ann. Combin. 14 (2010) 525-532. `http://www.fmf.uni-lj.si/~mohar/Reprints/Inprint/BM06_AC_Mohar_2cellEmbeddings.pdf`.

[MS] *Медников Л. Э., Шаповалов А.В.* Турнир городов: мир математики в задачах. МЦНМО, 2012.

[NPP] *Ф. Нилов, А. Полянский, Н. Полянский.* Инциденции точек и прямых, Мат. Просвещение, 21 (2017). `http://www.turgor.ru/lktg/2014/7/index.htm`

[O] Задачник по ОКТЧ./ Глибичук А.А. [и др.] Готовится к печати.

[P] *В. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. `http://www.mccme.ru/prasolov/`.

[PS05] *В.В. Прасолов и М.Б. Скопенков.* Рамсеевская теория зацеплений // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 108-115.

[R1] *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

[R2] *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2014.

[R3] *Райгородский А.М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2010.

[R4] *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2008. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-4.pdf`

[R5] *Райгородский А.М.*, Комбинаторика и теория вероятностей. М.: Изд-во МФТИ, 2012.

[R6] *Райгородский А.М.*, Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2013. `http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-2.pdf`

[Ru] *Рухович А.* Степенные последовательности ориентированных графов, `http://www.mccme.ru/mmks/dec09/ruhovich.pdf`

[S] *Д. Судзуки, Основы дзэн-буддизма.* Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України. 1992.

[S1] *Skopenkov A.* On the Kuratowski graph planarity criterion. `http://arxiv.org/abs/0802.3820`

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277. `http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html`

[S2] *Skopenkov A.* A two-page disproof of the Borsuk partition conjecture. `http://arxiv.org/abs/0712.4009`, v2.

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Короткое опровержение гипотезы Борсука. Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 88–92. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros/matprosi.html`

[S3] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2015. `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`

[S4] *Скопенков А.* Олимпиады и математика. Мат. Просвещение, 10 (2006), с. 57–63. `http://www.mccme.ru/free-books/matprosb.html`

[S5] *Скопенков А.* Простое доказательство теоремы Руффини-Абеля, Мат. Просвещение, 15 (2011), с. 113–126. `http://arxiv.org/abs/1102.2100`

[S6] *Скопенков А.* Объемлемая однородность, МЦНМО, Москва, 2012. `http://arxiv.org/abs/1003.5278`

[Sk] *A. Skopenkov.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, `http://arxiv.org/abs/1402.0658`

[Sk15] *A. Skopenkov.* A short elementary proof of the Ruffini-Abel Theorem, `http://arxiv.org/abs/1508.03317`

[S7] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`

[S12] *А. Скопенков.* Еще одно доказательство 'из Книги': теорема Менгера. Мат. Просвещение, 16 (2012), 48-49. `http://www.mccme.ru/free-books/matprosh.html`

[So] *Соловьева Ф. И.* Введение в теорию кодирования. Новосибирск, 2006. `http://tc.nsu.ru/uploads/codingtheory.pdf`

[Ve] *Веснин А.Ю.* Гамильтоновы графы и остовные подграфы: задачи для исследования, материалы Московской математической конференции школьников. `http://www.mccme.ru/mmks/mar08/vesnin3.pdf`

[Vi] *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

[VS] *Волков М., Силкин Н.* Кого послать на Марс? // Квант (1988) N8, с. 51–57. `http://kvant.mccme.ru/1988/08/kogo_poslat_na_mars.htm`

[VS97] *Н.Б. Васильев и А.Б. Скопенков.* Решение задачи М1566. // Квант (1997) N2, с. 24.

[SVY] А. Волостнов, А. Скопенков и Ю. Яровиков, Этюд о рекуррентных соотношениях, Мат. Просвещение 21 (2017), 213-218.

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. Изд-во МЦНМО, 2017. `http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf`

[1] `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~dc340/EGT3.pdf`

[2] http://www.cs.rit.edu/~spr/ElJC/ejcram14.pdf

[3] http://www.math.upenn.edu/~wilf/website/Three\
%20problems.pdf

[4] http://www.unn.ru/math/no/5/_nom5_001_ilyin.pdf

[5] http://www.sosmath.com/calculus/sequence/stirling/
stirling.html

[6] http://www.spbstu.ru/publications/m_v/n_002/Polischook/
Stirling.pdf

[7] http://arxiv.org/pdf/1109.2546.pdf

[8] http://dainiak.blogspot.ru

10 Программа курса ДА 2014-17 уч. годов

Обновлено 3.06. Спасибо студентам за вопросы, благодаря которым появились мелкие уточнения.

Нужно уметь решать задачи, аналогичные пп. 2.1-2.7, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.5, 5.1, 5.2, 5.5, 6.1-6.3, 7.1, 7.2 книги

Элементы дискретной математики в задачах, А.А. Глибичук, А.Б. Дайняк, Д.Г. Ильинский, А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков, А.А. Чернов, Изд-во МЦНМО, 2016, `http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf`

В скобках указана ориентировочная сложность пункта (или части пункта) программы. Формального смысла эти баллы не имеют. Но мы надеемся, что они помогут студентам разумно организовать подготовку к экзамену: не изучать более 'сложных' пунктов программы, пока не изучены более 'простые'. Пунктами 'на 5 и меньше' студенты (и преподаватели) могут пользоваться в дальнейших курсах (без повторения материала).

«Без доказательства» сокращается до «б/д». В пунктах программы приводятся ссылки на вышеуказанную книгу (или на имеющийся в ней список литературы или на другую литературу).

Образцы вопросов приведены после программы.

Глава 2. Графы (1-й семестр)

1. (3) Определение графа, графов с петлями и кратными ребрами. Ориентированые графы. Соотношение между числом вершин и ребер дерева. (П. 2.1 и задачи 2.2.1.)

2. (5) Код Прюфера. Формула Кэли.(Задачи 2.2.3.a и 2.2.4.c.)

3. (6) Точная формула для числа унициклических графов. (Задача 2.2.5.b.)

4. (5) Определение плоских и планарных графов. Формула Эйлера (б/д). Примеры непланарных графов. Критерий Понтрягина–Куратовского планарности графов (б/д).(П. 2.4 и задачи 2.4.2.)

5. (в 2017 не обязательно) (6) Классификация правильных многогранников с точностью до изоморфизма их графов. 6-раскрашиваемость любой карты на плоскости. (Задачи 2.4.3.cdefg и 2.4.4.a.)

6. (3) Пути и циклы. Простые пути и циклы. Критерии эйлеровости графа и ориентированного графа. (Задачи 2.5.3.ac.)

7. (5) Последовательности и графы де Брёйна.
(в 2017 не обязательно) Правило «ноль лучше единицы».
(Задачи 2.5.5–2.5.8.)

8. (5) Гамильтоновы пути и циклы. Достаточное условие Дирака гамильтоновости графа. (Задача 2.6.2.b.)

9. (7) Вершинная связность и число независимости графа. Достаточное условие гамильтоновости в их терминах. Гамильтоновость графа 1-пересечений 3-элементных подмножеств n-элементного множества. (Задачи 2.6.3, 2.6.4 и 2.6.5.c.)

10. (3) Гамильтоновы цепи в турнирах. Нижняя оценка с доказательством, верхняя — без. (Задача 2.6.7.)

11. (5) Теорема Турана о числе ребер в графе с данным числом вершин и числом независимости. Асимптотика наибольшего числа ребер в графе с n вершинами без k-клик. (Задачи 2.7.1 и 6.1.2.)

12. (6) Оценка числа ребер у дистанционного графа на плоскости и в пространстве произвольной размерности. Сравнение с теоремой Турана. (Задачи 2.7.2, 2.7.4, 2.7.5.)

Глава 3. Раскраски графов (1-й семестр)

13. (4) Соотношения между хроматическим числом, числом независимости и кликовым числом. (Задача 3.1.3.)

Глава 4. Основы теории Рамсея (2-й семестр)

14. (3) Числа Рамсея $R(s,t)$: точные значения для $s+t \leqslant 7$. Рекуррентная верхняя оценка Эрдеша–Секереша. (Задачи 4.1.1, 4.1.2.ac.)

15. (4) Следствие рекуррентной верхней оценки Эрдеша–Секереша для недиагональных и диагональных чисел Рамсея. Уточнение Конлона (б/д). Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея с помощью простого вероятностного метода. (Задачи 4.1.2.b, 4.1.5.)

16. (5) Многоцветные числа Рамсея $R_k(l_1, \ldots, l_r)$ и их рекуррентная верхняя оценка. Следствие для $R_3(s,t)$. Нижняя вероятностная оценка для $R_3(s,s)$. (Задачи 4.2.2.b, 4.2.7, 4.3.3, 4.3.4.)

17. (8) Верхняя оценка Конлона для двудольных чисел Рамсея: лемма с конкретными l, m, r, s и ее аналог с последовательностями (б/д); доказательство оценки с использованием леммы. (Есть оригинальная статья Conlon'а, скачивается с его домашней страницы.)

18. (8) Конструктивная нижняя оценка Франкла–Уилсона для $R(s,s)$. Доказательство лемм для кликового числа и для числа независимости. [R3]

19. Удалено

Глава 5. Системы множеств (гиперграфы) (20-27 1-й семестр, 22-31 2-й семестр)

20. (7) Гиперграфы. Гиперграфы t-пересечений. Теорема Эрдеша–Ко–Радо (о максимальном числе ребер в гиперграфе 1-пересечений). (Задача 5.1.3.)

21. (7) (5-6) История последовательных продвижений: теорема Эрдеша–Ко–Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе–Хачатряна. (Все б/д, но с подробными комментариями. Нужно продемонстрировать четкое понимание, что за параметры выбираются в теореме АХ: когда эта теорема превращается в ЭКР; когда оценка становится тривиальной ($\binom{n}{k}$); примеры конструкций, в которых можно явно посчитать, что оценка ЭКР не самая лучшая и АХ ее превосходит.) (Задачи 5.1.2, 5.1.3.)

22. (3) Системы общих представителей (с.о.п.). «Тривиальные» нижние и верхние оценки.

23. (5) Верхняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью жадного алгоритма. (Задачи 5.2.1, 5.2.5, 5.2.6.a.)

24. (8) Конструктивная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. (Задача 5.2.6.b.)

25. (7) Нижняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью обобщенных с.о.п. (Задача 5.2.6.c.)

26. (9) Вероятностная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. Следствие из нее. (Задача 5.2.6.def.)

27. (5) Системы различных представителей. Теорема Холла.

28. (5) Перманент. Формула разложения по строке. Связь с количеством систем различных представителей.

29. (6) С.о.п. в геометрии (теорема о треугольниках на плоскости). Размерность Вапника–Червоненкиса. Теорема Радона (б/д). Подсчет размерности семейства полупространств. Лемма о числе областей в пространстве заданной мощности и размерности. Лемма о размерности измельчения (достаточно доказать существование верхней оценки, не обязательно такой, как на лекции) (Задачи 5.5.1 и 5.5.2.bc.)

(только в 2014-16) Оценка числа подмножеств в семействе заданной размерности на n-элементном множестве. (Задача 5.5.9.)

30. (8) Эпсилон-сети. Теорема Вапника–Червоненкиса об эпсилон-сетях и теорема о треугольниках как частный случай.

31. (5) Теорема Вапника–Червоненкиса (б/д). Приложения в статистике: равномерная сходимость в ЗБЧ (УЗБЧ) и теорема Гливенко–Кантелли как частный случай.

Глава 6. Аналитические и вероятностные методы (32-36 1-й семестр, 37-50 2-й семестр)

32. (3) (3) Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Оценки для $\binom{n}{n/2}$ с помощью тождества. (Задачи 6.1.7.a и 6.1.5.ab.)

33. (5) Асимптотика $\ln n!$ и $\sqrt[n]{n!}$ с доказательством без использования формулы Стирлинга. Формула Стирлинга (б/д). (Задача 6.1.6.)

34. (5) Оценки биномиальных коэффициентов вида $\binom{n}{[an]}$, $a \in (0,1)$. Аналогичный результат для полиномиальных коэффициентов. (Задача 6.1.5.cdef.)

35. (5) Асимптотика для $\binom{n}{k}$ при $k^2 = o(n)$. Оценки той же величины при больших k. Асимптотики для $\binom{n}{n/2}/\binom{n}{n/2-x}$. (Задача 6.1.7.bcde.)

36. (8) Асимптотика числа унициклических графов. (Задача 6.1.12.b.)

37. (5) Симметричный случай ЛЛЛ (б/д). Вывод оценки диагонального числа Рамсея (теорема Спенсера). (Задачи 6.2.15, 6.2.21.b и 6.2.26.a.)

38. (6) Симметричный и несимметричный случай ЛЛЛ (с доказательством симметричного либо напрямую, либо с доказательством несимметричного и выводом из него). (Задачи 6.2.15 и 6.2.26.a.)

39. (10+) Вывод из несимметричного случая ЛЛЛ нижней оценки для $R(3,t)$ (с выписыванием неравенств, требуемых для применения ЛЛЛ, но без их доказательства). Самые точные известные оценки для $R(3,t)$ (б/д). (Задача 6.2.26.b и замечание после нее.)

40. (5) Двудольные числа Рамсея: нижние оценки простым вероятностным методом и с помощью ЛЛЛ. Отличие нижних оценок для двудольных чисел Рамсея от аналогичных нижних оценок для $R(s,t)$. (Литературы нет; делается совершенно аналогично тому, как то же самое делается для обычных чисел Рамсея.)

41. (6) Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Неравенство для случайного блуждания. (п. 6.3, [R4, п. 1.11 и 1.12])

42. Совмещено со следующими.

43. (7) Связность случайного графа: случай $p = c\ln n/n$ при $c < 1$. Теоремы о $\dfrac{\ln n + \gamma + o(1)}{n}$ и о гигантской компоненте (б/д). [R4, п. 2.5]

44. (8) Связность случайного графа: случай $p = c\ln n/n$ при $c > 1$. [R4, п. 2.5]

45. (4) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при $p = o(1/n^2)$ и $p = o(1/n)$. [R4, п. 2.6]

46. (9) Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа случайного графа при $p = c/n$, $c < 1$. Случай, когда функция из второй теоремы Боллобаша может стремиться к бесконечности.[R4, п. 2.6]

47. (только в 2017) (8) Оценка отклонения для липшицевой по вершинам случайной величины (б/д). Теорема Боллобаша о концентрации в четырех значениях.

48. (7) Сравнение оценок хроматического числа через кликовое число и число независимости в терминах случайных графов: одна «почти всегда» значительно лучше другой (распределение кликового числа и числа независимости). [R4, п. 2.7]

49. (10) Теорема о том, что почти наверное жадный алгоритм найдет множество, размер которого лишь, как максимум, в 2 раза отличается от реального. Теорема Кучеры о слабости жадного алгоритма на специальных графах (б/д). (А. Райгородский, "Экстремальные задачи теории графов и Интернет" , Интеллект.)

50. (8) Теорема Эрдеша о графе с большим обхватом и большим хроматическим числом. (Задача 6.3.3.c.)

Глава 7. Алгебраические методы (51-58 1-й семестр, 59-62 2-й семестр)

51. (5) Кнезеровский граф. Верхняя оценка его хроматического числа. Простые нижние оценки. Примеры конкретных кнезеровских графов. Кликовое число и число независимости кнезеровского графа. ([R7] := А. Райгородский, "Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике МЦНМО.)

52. (6) Верхняя оценка хроматического числа кнезеровского графа. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа (б/д; с доказательством — на ‘8’). [R7]

53. (только в 2014-16) (7) Теорема Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана в разных формулировках, но с доказательством только в случае плоскости и трехмерного пространства. [R7]

54. (6) Максимальное число $m(n,k,t)$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых ровно k элементов и среди которых любые два множества пересекаются не по t элементам. Точное значение для $m(n,3,1)$: явная конструкция и оценка по индукции. Линейно-алгебраическая оценка для $m(n,3,1)$. Аналогичная оценка для $m(n,5,2)$ и ее асимптотическая неулучшаемость. [R1]

55. (6) Общая теорема Франкла–Уилсона для $m(n,k,k-p)$ при $k<2p$. (Задача 7.1.8 и [R1].)

56. (только в 2015) (9) Теорема Франкла–Уилсона об $m(n,k,k-p)$ при $k \geqslant 2p$. [R1]

57. (только в 2015) (7) Точность обеих теорем Франкла–Уилсона при постоянных k, t. Максимальное число k-элементных подмножеств n-элементного множества, из которых любые два множества пересекаются не более чем по t элементам. Связь с теорией кодирования, теорема Редля (б/д). [R1]

58. (6) Хроматические числа пространств. Интерпретация величины $m(n,k,t)$ как числа независимости дистанционного графа. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью результатов для $m(n,k,t)$. Возможные улучшения. ([R1] и А. Райгородский, "Хроматические числа".)

59. (5) Матрицы Адамара. Необходимое условие существования. Гипотеза Адамара. Нормализация. Теорема о плотности порядков матрицы Адамара в натуральном ряде (б/д).(Задачи 7.2.1-7.2.3, определения и гипотеза в §7.2, [Hal, AS].)

60. (6) Приложения матриц Адамара к задаче о раскраске гиперграфа: определение уклонения, верхняя оценка вида $\sqrt{2n\ln(2s)}$ с доказательством и оценка вида $6\sqrt{n}$ (б/д). [R3]

61. (8) Приложения матриц Адамара к задаче о раскраске гиперграфа: нижняя оценка с помощью матриц Адамара. [R3]

62. (4) Интерпретация матриц Адамара в терминах дистанционного графа, возникающего в теореме Франкла–Уилсона (клики и независимые множества).

ОБРАЗЦЫ ВОПРОСОВ НА ЭКЗАМЕНЕ

Предварительная часть (вариант 2014 года). *Нужен только ответ/формулировка; доказательства приводить не нужно.*

1. Найдите асимптотику биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$ при $k^2 = o(n)$.

2. Найдите количество деревьев с данными n вершинами, с точностью до изоморфизма.

3. Дайте определение гамильтонова цикла в графе. (Можно использовать только определение графа. Если Вы используете другие определения — например, цикла — то их тоже нужно дать.)

4. Сформулируйте теорему о хроматическом числе случайного графа в модели $G(n,p)$ при $p = o(1/n)$ и $n \to \infty$.

5. У дистанционного графа на плоскости $4n$ вершин, и среди любых $n+1$ вершин есть ребро. Сформулируйте наилучшую оценку на количество ребер такого графа, доказанную в курсе.

6. Найдите кликовое число графа, вершины которого — все 5-элементные подмножества 20-элементного множества, и ребро между вершинами проводится в том и только в том случае, когда множества не пересекаются?

7. Найдите $R_4(15,4,4,4)$.

8. Найдите максимальную VC-размерность семейства подмножеств множества $\{1,\ldots,10\}$ в каждом подмножестве которого более 5 элементов.

Основная часть (точно таких вопросов на экзамене не будет). *Здесь главное — не ответы, а доказательства. В частности, формулировки и доказательства всех используемых студентом результатов из курса ДА (в частности, всех результатов из курса ДА, используемых для доказательства других результатов из курса ДА). При этом можно пользоваться без доказательства результатами из других курсов.*

Вопрос из билета. Существует ли 57 подмножеств 60-элементного множества, в каждом из которых 30 элементов, и любые два из которых пересекаются по 15 элементам?

Критерии. Максимальное количество очков 7.

Конструкция с использованием задачи 7.2.4 без ее доказательства — 2 очка.

За подсказку ‘вспомните матрицы Адамара’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос попроще. Каково наибольшее число ребер в графе с 52 вершинами, в котором среди любых 5 вершин есть 2, не соединенные ребром?

Критерии. Максимальное количество очков 6.

Правильный ответ без доказательства — 1 очко.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана без ее доказательства — 2 очка.

Правильный ответ с выводом из теоремы Турана плюс конструкция ‘максимального графа’ без доказательства верхней оценки — 3 очка.

За подсказку ‘вспомните теорему Турана’ снимается 2 очка.

Доп. вопрос посложней. Укажите функцию $f(n)$, для которой $R(n,n) \gtrsim f(n)$. (Чем больше функция, тем выше Ваша оценка.)

Критерии. Максимальное количество очков 9.

За оценку типа $R(n,n) \gtrsim n^2$ ставится 1 очко.

За оценку типа 4.1.5.b ставится 6 очков.

За оценку типа 6.2.21.b ставится 9 очков.

Если при этом не доказывается неравенство $n! \geqslant (n/e)^n$ (6.1.6.c), то снимается 2 очка (это неравенство несложно доказывается без использования формулы Стирлинга; его вывод из формулы Стирлинга, не доказанной в курсе, не считается доказательством).

Если при этом не доказывается ЛЛЛ в симметричной форме (6.2.15.b), то снимается 5 очков (ЛЛЛ в симметричной форме студент может либо напрямую, либо *доказав* ЛЛЛ в несимметричной форме и выведя ЛЛЛ в симметричной форме; вывод симметричной формы из несимметричной в этом месте не считается доказательством симметричной, хотя и входит в программу).

За подсказку — формулировку 4.1.5.c — снимается 2 очка. За подсказку — формулировку каждого следующего пункта этой задачи — снимается еще по 1.

Призовой вопрос. Существуют ли хотя бы одно k и подмножество k-мерного пространства, которое невозможно разбить на $2k^2$ частей меньшего диаметра?