

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ В ИНТЕРЕСНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ

спецкурс А.Б. Скопенкова

Для многообразий важнейшие методы алгебраической топологии наиболее наглядны. Это позволяет быстро добраться до по-настоящему интересных и сложных результатов. На спецкурсе изучаются основные методы алгебраической и дифференциальной топологии, полезнейшие для их приложений. Например, пересечение в гомологиях, характеристические классы, векторные расслоения и конструкция Понтрягина. В частности, будут даны наброски доказательств следующих ярких результатов: существование

- нестандартной семимерной сферы (Милнор);
- нетривиального трехмерного узла в шестимерном пространстве (Хефлигер).

Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого и курс становится доступным для начинающих, и удается быстро добраться до интересных сложных теоретически важных результатов. Для изучения курса достаточно знакомства с основами алгебраической топологии многообразий — например, в объеме глав 1-6, 8 и 10 книги

[S] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, МЦНМО, 2020.

Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции). Экзамен состоит из решения задач в течение семестра и письменных контрольных работ. Подробная информация: <http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combttop13.htm#algmanif>

Программа (пп. 7-9 вошли в окончательную программу, хотя не входили в предварительную; пп. 11-14 — наоборот)

1. Три классические проблемы топологии: гомеоморфизма, вложимости и заузливания. Некоторые яркие результаты. [S, 11.1, 12.1]

2. Пересечение в гомологиях многообразий. Двойственности Пуанкаре и Лефшеца (простая и сложная части). [S, 10.8, 10.9, 11.2]

3. Эйлерова характеристика по модулю 2 — инвариант кобордизма. Сигнатура — инвариант ориентированного кобордизма. Неограничивающие многообразия. [S, 10.4, 11.1, 11.4]

4.* Классификация маломерных многообразий с точностью до кобордизма (формулировка). Числа Штифеля-Уитни и Понтрягина — инварианты кобордизма. Теорема Тома о классификации многообразий с точностью до кобордизма (формулировка). Теорема Хирцебруха о сигнатуре; набросок вывода из теоремы Тома. [S, 16]

5. Теоремы Рохлина и Милнора-Кервера-Хирцебруха о делимости сигнатур. Применение: инвариант Рохлина трехмерных гомологических сфер и инвариант Милнора семимерных гомотопических сфер. Нестандартная сфера Милнора. [S, 11.4, 11.9]

6. Конструкция Понтрягина: оснащенные многообразия и их кобордизмы. Гомотопическая классификация отображений n -мерной сферы в n -мерную. [S, 8.8, 14.6] [DNF, ч.2, §23]

7. Надстройка. Гомотопическая классификация отображений $(n+1)$ -мерной сферы в n -мерную. [DNF, ч.2, §23]

8. Поверхность Зейферта, матрица Зейферта, сигнатура и Arf-инвариант узла. [Kauffman]

9. Оснащенные перестройки. Arf-инвариант оснащенной поверхности. Гомотопическая классификация отображений $(n+2)$ -мерной сферы в n -мерную. [DNF, ч.2, §23]

10. Заузленная сфера Хефлигера. Инвариант Хефлигера. Его корректная определенность и полнота. [Haefliger, 1962, Ann. of Math.]

http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Knots,_i.e._embeddings_of_spheres

11. Геометрическое определение характеристических классов Штифеля-Уитни как препятствий к существованию системы векторных полей. [S, 9]
12. Нормальные классы Уитни как препятствия к погружаемости и вложимости многообразий. Непогружаемость и невложимость проективных пространств. [S, 12.2-12.5]
- 13.* Инварианты гомотопических сфер. [S, 16.6]
- 14.* Изотопия. Инвариант Ву вложений графов в плоскость и в пространство.

[DNF, ч.2] Dubrovin B. A., Fomenko A. T. and Novikov S. P., Modern geometry. Part II: The geometry and topology of manifolds, 2012, Springer Science & Business Media.