Разбиением числа n называется невозрастающая послеовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = n$$

Числа a_i называются частями разбиения.

Разбиение $a' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_{k'})$ называется сопряженным разбиением разбиения $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ если a'_i равно числу частей a не меньших i и $k' = a_1$.

Проверьте, что сопряженное разбиение является разбиением тогоже числа.

0. Пусть M множество. Обзначим через $p(M, n)$ количество разбиений числа n на части, лежащие в M, а через $p(M(\leqslant d), n)$ количество разбиений числа n на части, лежащие в M, d которых части повторяются не более d раз. Тогда:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(\mathbb{N}(\leqslant 1), n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(\mathbb{N}, n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^n + q^{2n} + q^{3n} + \ldots\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(M(\leqslant d), n) q^n = \prod_{n \in M} (1 + q^n + q^{2n} + \ldots + q^{dn}) = \prod_{n \in M} \frac{1 - q^{(d+1)n}}{1 - q}$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(M, n) q^n = \prod_{n \in M} \frac{1}{1 - q^n}$$

1. Количество разбиений числа n на нечетные части равно количеству разбиений числа n на раз различный части.

2. Количество разбиений числа n, в которых могут повторяться только нечетные части, равно количеству разбиений числа n, в которых части встречаются не более трех раз.

3. Модуль разности между количеством разбиений n на нечетное число частей и количеством разбиений на четное число частей равен числу разбиений n на различные нечетные части.

4. Количество разбиений числа n, в которых части встречаются 2, 3 или 5 раз, равно количеству разбиений n на части сравнимые с 2, 3, 6, 9 или 10 по модулю 12.

5. Количество разбиений числа n на различные нечетные части равно количеству самосопряженых (совпадающих со своими сопряженными разбиениями) разбиений числа n.

6. Пусть A равно количеству разбиений числа n, с наибольшей частью, не превосходящей удвоенной наименьшей, и единственной наименьшей частью. Тогда A равно количеству разбиений n, с наибольшей частью, не превосходящей удвоенной наименьшей, и нечетной наибольшей частью.

7. a) Пусть $P_1(n,r)$ – количество разбиений числа n на части, либо четные и не сравнимые с $-2 \mod 4r$, либо сравнимые с $-1 \mod 2r$. Пусть $P_2(n,r)$ количество разбиений числа n, в которых могут повторяться только четные части, а все нечетные части сравнимы с $-1 \mod 2r$. Тогда $P_1(n,r) = P_2(n,r)$.

b) Пусть $P_3(n,r)$ – количество таких разбиений числа n на части $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k$, что если a_i – нечетное, то $a_i - a_{i+1} \geqslant 2r-1$ (a_{k+1} считается равным 0). Тогда $P_2(n,r) = P_3(n,r)$.

8. a) Пусть $M_1(n)$ – количество разбиений числа n на части, большие 1, в которых нет двух частей отличающихся на 1. Пусть $M_2(n)$ количество разбиений числа n, в которых все части встречаются хотя бы дважды. Тогда $M_1(n) = M_2(n)$.

b) Пусть $M_3(n)$ количество разбиений числа n на части, не сравнимые с $\pm 1 \mod 6$. Тогда $M_2(n) = M_3(n)$.

9.

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\ldots(1-q^k)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)}$$

10. (Пентогональное тождество Эйлера)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(q^{\frac{n(3n+1)}{2}} + q^{\frac{n(3n-1)}{2}}\right)$$

Указание: попытайтесь срезать крайне правую диагональ диаграммы Юнга и приставить ее в качестве нижней строки.

11*. (Тождество Якоби)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k q^{k^2}$$

Указание: разделите на первый сомножитель и попытатйтесь придать комбинатоный смысл тождеству. Рассмотрите "скошенные" диаграммы Юнга: изобразите клеткой 2 единицы, а треугольником в полклетки – единицу.

Разбиения: добавка

Обозначим за (N, l, d) оличество разбиений числа N на неболее чем l частей, каждая из которых не превосходит d. Также обозначим $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q = \sum_{i=0}^{\infty} (N, k, n-k) q^i$. Заметим, что $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q$ вляется многочленом от q.

Д1. а)$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right)_q$

b) Значение $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q$ в точке $q = 1$ равно C_n^k

Д2. $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right)_q + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)_q q^{n-k}$

Д3. $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q)\ldots(1-q^k)(1-q)\ldots(1-q^{n-k})}$