Группа "Зверь"

Гаврилюк А.А., 16.11.08

Эллипс - геометрическое место точек P (плоскости) таких, что сумма расстояний $PF_1 + PF_2$ постоянна для некоторых фиксированных точек F_1, F_2 (этой плоскости). Точки F_1, F_2 называются **фокусами эллипса**.

Гипербола - геометрическое место точек P (плоскости) таких, что модуль разности расстояний $|PF_1 - PF_2|$ постоянен для некоторых фиксированных точек F_1, F_2 (этой плоскости). Точки F_1, F_2 называются **фокусами гиперболы**.

Парабола - геометрическое место точек P (плоскости) таких, что равны расстояния $PF = \rho(P, d)$ для некоторых фиксированных точки F и не содержащей её прямой d (в этой плоскости). Точка F называется **фокусом параболы**, прямая d называется **директрисой параболы**.

1. Дан круговой конус в пространстве. В одну из двух его полостей вписаны две непересекающиеся сферы. Доказать, что их общая внутренняя касательная плоскость высекает на конусе эллипс.

2. Из предыдущей задачи следует, что сечение полного кругового конуса плоскостью является эллисом, если эта плоскость пересекает ровно одну полость конуса, и если при этом сечение получается ограниченным. Докажите аналогично, что сечение плоскостью, пересекающей обе полости конуса - гипербола; сечение плоскостью параллельной какой-нибудь образующей конуса - парабола.

3. Точки B и C лежат на сторонах F_1A и F_2A треугольника F_1AF_2 соответственно. Отрезки F_1C и F_2B пересекаются в точке D. Докажите, что четырёхугольник $ACDB$ - описанный тогда и только тогда, когда точки B и C лежат на эллипсе с фокусами F_1 и F_2.

Фигура F называется **выпуклой**, если для любых двух её точек A, B и произвольного $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ точка $A + \alpha\overrightarrow{AB}$ также принадлежит фигуре F (то есть, вместе с концами всегда содержится весь отрезок целиком).

4 Докажите, что овал (т.е. внутренность эллипса) - выпуклая фигура. (Аналогичное утверждение верно и для фигур, ограниченных гиперболами, параболами)

5 A - точка эллипса E с фокусами F_1, F_2. Докажите:

   (a) внешняя биссектриса угла F_1AF_2 не имеет общих точек с E кроме A

   (b) любая другая прямая, проходящая через точку A, пересекает эллипс E ровно в двух точках.

Касательной к эллипсу называется любая прямая, пересекающая ограниченный данным эллипсом овал лишь по точкам границы.

Аналогично, можно определить касательные к гиперболе и параболе. Из задачи 5 следует, что любая касательная l_A пересекает эллипс ровно в одной точке A, образуя при этом равные углы с F_1A и F_2A. Аналогичное утверждение также верно для гипербол и парабол. В случае гиперболы следует рассматривать внутреннюю биссекртису угла, а в случае параболы следует рассматривать углы, составленные касательной в точке A с отрезком AF и с перпендикуляром из A на директрису параболы.

7 F_1 и F_2 - фокусы эллипса E. Проводится произвольная касательная l к E. Точка F_l симметрична F_1 относительно l. Найти геометричекое место таких точек F_l.

8 Точка M лежит снаружи эллипса E, причём угол между двумя касательными, проведёнными из M к E равен $90°$. Найти геометрическое место таких точек M.

9 **Теорема Понселе:** точка A лежит снаружи эллипса E, F_1 - один из фокусов эллипса, AT и AK - касательные к нему. Доказать $\angle KF_1A = \angle TF_1A$

Точки I и J лежат внутри треугольника ABC. Они называются **изогонально сопряжёнными** относительно данного треугольника, если $\angle ABI = \angle CBJ, \angle BCI = \angle ACJ, \angle CAI = \angle BAJ$ (то есть в каждой вершине треугольника соответствующие лучи симметричны относительно биссектрисы).

10 Точки I и J лежат внутри треугольника ABC. Доказать, что они изогонально сопряжены тогда и только тогда, когда являются фокусами вписаного в треугольник ABC эллипса.

11 Все углы треугольника ABC меньше $120°$, T - его точка Торичелли. Прямые AT, BT, CT отражаются относительно сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что три полученные прямые также проходят через одну точку.