Гармонические четвёрки
Ф.Нилов

Определение 1. *Двойным отношением* четырёх точек A, B, C и D на прямой называется число

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

1. Докажите, что
(a) $(ABCD) = (BADC)$,
(b) $(ABCD) + (ACBD) = 1$,
(c) $(ABCD) \cdot (BACD) = 1$,
(d) Пусть $(ABCD) = \phi$. Какие значения может принимать $(A'B'C'D')$, где $A'B'C'D'$ — любая перестановка точек $ABCD$?

2. (a) Какие значения может принимать $(ABCD)$?

(b) Пусть на прямой даны три различные точки A, B и C, ϕ — некоторое фиксированное число. Докажите, что на этой прямой существует и притом единственная точка D (возможно, "бесконечно удалённая") такая, что $(ABCD) = \phi$.

3. Докажите, что двойное отношение четвёрки точек сохраняется при центральной проекции.

4 *(Теоремы о бабочках)*. а) Через середину M хорды PQ некоторой окружности проведены две хорды AB и CD этой окружности. Пусть AC и BD пересекают PQ в точках X и Y. Тогда M — середина XY.

b) На окружности дана хорда PQ, на ней — точки M и N, причём $PM = QN$. Через точки M и N проведены хорды AB и CD этой окружности. Пусть AC и BD пересекают PQ в точках X и Y. Тогда $PX = QY$.

5. Дан треугольник ABC. Обозначим через A', B' и C' основания его соответствующих биссектрисс. Обозначим через P и Q точки пересечения прямых AA' и B'C', CC' и A'B'. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

6. Дан четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. Обозначим через E и F точки пересечения его противоположных сторон AB и CD, BC и DA. Обозначим через L точку пересечения его диагоналей. Докажите, что $\angle ELB = \angle FLB$.

Определение 2. *Гармонической четвёркой* называется четвёрка точек A, B, C, D таких, что $(ABCD) = -1$.

7 *(Теорема о полном четырёхстороннике)*. Дан четырёхугольник $ABFI$. Обозначим через G, E, C и D точки пересечения прямых AF и IB, AI и BF, AB и GE, AB и IF соответственно. Тогда точки A, B, C и D образуют гармоническую четвёрку.

8. На плоскости дан отрезок AB и выпуклая ограниченная область R, пересекающая продолжение отрезка. Продлите с помощью одной линейки отрезок AB за область R при условии, что в процессе построения линейкой не накрывается никакая часть области.

9. Дан треугольник ABC. Обозначим через A' и A'', B' и B'', C' и C'' основания внутренних и внешних биссектрис, проведённых из соответствующих вершин. Докажите, что
(a) точки B, C, A' и A'' образуют гармоническую четвёрку.
(b) точки A'', B' и C' лежат на одной прямой.
(c) точки A'', B'' и C'' лежат на одной прямой.

10. а) Из точки A к окружности проведены две касательные AP и AQ. Через точку A проведена произвольная прямая, пересекающая окружность в точках B и C, а хорду PQ — в D. Докажите, что точки A, B, C и D образуют гармоническую четвёрку.

b) Обозначим середину PQ через M. Докажите, что $\angle PBD = \angle QBM$.

11. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке K, а стороны BC — в точке E. Отрезки AE и BK пересекаются в точке S. Данная окружность вторично пересекает BK в точке M. Докажите, что $\frac{SM}{SK} < 3$.

12. Дан четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через E и F точки пересечения его противоположных сторон AB и CD, BC и DA. Обозначим через L точку пересечения его диагоналей. Обозначим через K проекцию точки L на прямую EF. Докажите, что $\angle AKB = \angle CKD$.