Рёберные графы.

Какая ночь, мой милый граф!
Луна так ярко светит...

Назовём *графом смежности* графа G граф $L(G)$, вершины которого соответствуют рёбрам графа G, ребро есть у соответствующих рёбер есть общая вершина. Поскольку компоненты связности графа смежности — это компоненты связности графа G, мы будем рассматривать только связные графы.

Задача 1. Найдите примеры таких графов M такого, что не существует графа $G : L(G) = M$, и

- имеет больше вершин, чем ребер
- M имеет одинаковое количество ребер и вершин.
- имеет больше ребер, чем вершин.
- разность количества ребер и вершин больше, чем любое заранее заданное число n.
- отношение количества ребер к количеству вершин больше, чем любое заранее заданное число n.

Задача 2. Докажите, что если $L(G) = G$, то G — цикл.

Задача 3. Докажите, что если $L(L(L \dots L(G) \dots)) = G$, то G — цикл (письменная!)

Задача 4. Существуют ли два таких неизоморфных непустых графа G_1 и G_2, что $L(G_1) = L(G_2)$?

Будем называть граф G *обратимым*, если существует ровно один граф M: $L(M) = G$, граф будем называть прообразом G.

Задача 5. Доказать, что следующие графы обратимы и построить их прообразы:

- полный граф с кол-вом вершин больше трёх.
- граф, в котором все вершины подграфа G_1 соединены друг с другом, все вершины подграфа G_2 тоже, и вершина , не принадлежащая G_1 и G_2 , соединена со всеми вершинами G_1 и G_2 (подграфы G_1 и G_2 не имеют общих вершин, каждый из них имеет больше трёх вершин, соединены ребром только перечисленные пары вершин).
- граф из предыдущего пункта, в котором проведены ребра $_iC_i$, где $_1$, $_2$,..., $_n$ — различные вершины G_1,а $_1$, $_2$, ..., $_n$ — различные вершины G_2.

Задача 6. Доказать, что почти все графы G (т.е. все, за исключением конечного кол-ва), для которых существует такой граф , что $L(M) = G$, обратимы и указать все графы , имеющие более одного прообраза (если такие есть).

Задача 7. Привести пример двух графов, которые изоморфны, но не одинаковы, имеющие одинаковые графы связности (пояснение: можно пронумеровать ребра первого и второго графов, чтоб их нумерация не была одинакова, но при этом нумерация соответствующих вершин в их графах связности будет одинакова).

Задача 8. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

- G обратим
- ребра графа G можно разбить на полные подграфы таким образом, чтобы ни одна из вершин не принадлежала более чем двум подграфам
- граф G не содержит звезду $K_{1,3}$ в качестве порожденного подграфа (то есть ограничения рёбер на подмножество вершин), и если два треугольника имеют общее ребро, то подграф, порожденный их вершинами, есть K_4
- ни один из следующих девяти графов не является порожденным подграфом графа G:
  - ⋄ Дерево из трех ребер, имеющих общую вершину
    (В последующих пунктах под *ромбом* будем понимать граф с вершинами 1, 2, 3, 4, соединенных по циклу друг с другом, и кроме того, с ребром 1-3)
  - ⋄ Ромб плюс вершина 5, соединенная с 2 и 4.
  - ⋄ Ромб плюс вершина 5, соединенная со всеми вершинами ромба.
  - ⋄ Ромб, плюс две висячие вершины, прикрепленные к 2 и 4.
  - ⋄ Ромб плюс вершина 5, соединенная с 1, 2, 3, плюс висячая вершина, прикрепленная к 4.
  - ⋄ Ромб плюс вершина 5, соединенная с 1, 2, 3,плюс вершина 6,соединенная с 1,3,4.
  - ⋄ Ромб плюс вершины 5, 6, и ребра 2-5, 5-6, 6-4.
  - ⋄ Ромб плюс вершина 5, соединенная с 2 и 3, плюс вершина 6, соединенная с 1 и 4.
  - ⋄ Граф из пункта 7), в котором дополнительно проведены ребра 3-5 и 3-6.

Задача 9. Доказать, что если G гамильтонов, то $L(G)$ тоже гамильтонов.

Задача 10. Доказать, что если G эйлеров, то $L(G)$ эйлеров и гамильтонов.