Разные задачи

1. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки среди её соседей (по стороне) были хотя бы две клетки, окрашенные в тот же цвет?

2. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

3. В городе разрешены только парные обмены квартирами (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагается, что и до, и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)

4. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке.

a) Во скольких точках пересекутся диагонали?

b) На сколько частей разделится при этом многоугольник?

5. a) На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке по чижу. Елки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке?

b) А если елки растут по кругу?

6. В городе n площадей и m улиц ($m \geqslant n+1$). Каждая дорога соединяет две площади и не проходит через другие площади. Каждая улица может называться либо красной либо синей. Ежегодно происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из нее улицы. Докажите, что вначале можно назвать улицы так, что переименования нельзя сделать все названия одинаковыми.

7. В однокруговом футбольном турнире участвуют n команд. Они договорились, что каждая команда в своей k-ой игре забивает k голов. Каково наименьшее число ничьих в таком турнире?

8. В однокруговом футбольном турнире участвуют 20 команд. Докажите, что после двух туров можно выбрать 10 команд, среди которых нет двух уже сыгравших.