Комплексные числа и геометрия — 1

А.А.Заславский

Комплексным числом *называется выражение вида* $a + bi$, *где* a, b *произвольные действительные числа. Сложение и умножение комплексных чисел производится аналогично сложению и умножению многочленов, причем считается, что* $i^2 = -1$. *Комплексное число* $\overline{z} = a - bi$ *называется сопряженным числу* $z = a + bi$.

1. Докажите, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

2. Докажите, что сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами, причем произведение ненулевых сопряженных чисел всегда положительно.

3. Докажите, что для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует такое комплексное число z', что $zz' = 1$.

4. Выведите формулу для частного от деления комплексного числа $a + bi$ на $c + di$.

Любое ненулевое комплексное число можно представить в **тригонометрической форме**: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *где положительное число* r, *называемое* **модулем** z, *определяется однозначно, а угол* φ, *называемый* **аргументом** z, *с точностью до слагаемого, кратного* 2π.

Комплексному числу $z = a + bi$ *взаимнооднозначно соответствует точка плоскости* Z *с координатами* (a, b), *при этом модуль* z *равен расстоянию от* Z *до начала координат* O, *а аргумент ориентированному углу между положительным направлением оси* OX *и вектором* $\vec{OZ}$. *Оси* OX *и* OY *называют действительной и мнимой осями.*

5. Выясните геометрический смысл сложения комплексных чисел.

6. Какое преобразование комплексной плоскости переводит точку z в точку $z' = az$, где $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$ — комплексное число с единичным модулем.

7*. Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

8. Из утверждения предыдущей задачи выведите тригонометрическиие формулы сложения.

9. Выясните геометрический смысл преобразования комплексной плоскости, переводящего точку z в точку

a) $az + b$;

b) $a\overline{z} + b$.

a, b — произвольные комплексные числа, $a \neq 0$.

10. Докажите, что любое преобразование подобия задается одной из формул предыдущей задачи.

11. Докажите, что аффинное преобразование комплексной плоскости переводит каждую точку z в точку $z' = az + b\overline{z} + c$, где a, b, c — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|a| \neq |b|$.

12. (С.Маркелов) На сторонах аффинно-правильного n-угольника построены во внешнюю сторону правильные n-угольники. Докажите, что их центры образуют правильный n-угольник.

Комплексные числа и геометрия — 2
А.А.Заславский

Преобразование круговой плоскости, сохраняющее окружности, называется **круговым**. *Произвольное круговое преобразование может быть представлено как композиция инверсии и движения.*

13.* Докажите, что преобразование комплексной плоскости является круговым тогда и только тогда, когда оно задается дробно-линейной функцией вида $z' = (az+b)/(cz+d)$ или $z' = (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$.

14. Докажите, что для любых шести точек A, B, C, A', B', C' существует ровно два круговых преобразования, переводящих A в A', B в B', C в C'.

Двойным отношением *четырех комплексных чисел a, b, c, d называется комплексное число* $(ab;cd) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$.

15*. Докажите, что для данных восьми точек A, B, C, D; A', B', C', D' круговое преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C', D в D', существует тогда и только тогда когда для соответствующих комплексных чисел $(ab;cd) = (a'b';c'd')$ или $\overline{(ab;cd)} = (a'b';c'd')$.

16. Даны два треугольника — ABC и $A'B'C'$. Докажите, что существует инверсия, переводящая треугольник ABC в треугольник, равный $A'B'C'$.

17. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что существует инверсия, переводящая его вершины в вершины параллелограмма, причем все параллелограммы, полученные в результате таких инверсий подобны.

18.

a)Пусть a, b, c — комплексные числа, соответствующие точкам A, B, C; $f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$. Докажите, что точки, соответствующие корням $f'(z)$, изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

b*) **Эллипсом Штейнера** треугольника ABC называется эллипс наибольшей площади, лежащий внутри треугольника. Докажите, что фокусы эллипса Штейнера соответствуют корням $f'(z)$.

19*. Пусть a, b, c — комплексные числа, соответствующие точкам A, B, C, причем $|a| = |b| = |c| = 1$. Докажите, что точки Z_1, Z_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC тогда и только тогда, когда соответствующие комплексные числа удовлетворяют соотношению

$$z_1 + z_2 = abc\overline{z_1 z_2} + a + b + c.$$

20*. Как известно, расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей треугольника выражается через радиусы R, r этих окружностей с помощью **формулы Эйлера**: $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Докажите обобщение этой формулы: если в треугольник вписан эллипс с фокусами F_1, F_2 и малой осью l, то

$$R^2 l^2 = (R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2).$$

21*. (А.Акопян) Дан треугольник ABC и точка P. Найдите ГМТ, изогонально сопряженных P относительно всех треугольников, имеющих те же описанную и вписанную окружности, что и ABC.