Простые числа.

1. $p_n < 2^{2^n}$
2. $p_{n+1} < p_1 p_2 \dots p_n$
3. $\sigma_k(n) = \frac{p_1^{k(\alpha_1+1)}-1}{p_1^k-1} \frac{p_2^{k(\alpha_2+1)}-1}{p_2^k-1} \dots \frac{p_r^{k(\alpha_r+1)}-1}{p_r^k-1}$
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$
5. $(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_r}) \to 0$
6. $1-\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}$
7. $\sum \frac{1}{p_k} \to \infty$

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\pi(n)}$
10	4	2,5
100	25	4,0
1000	168	6,0
10000	1229	8,1
100000	9592	10,4
1000000	78498	12,7
10000000	664579	15,0
100000000	5761455	17,4
1000000000	50847534	19,7
10000000000	455059512	22,0

8. $\frac{2}{3}\frac{n}{lnn} < \pi(n) < 1,7\frac{n}{lnn}$

Письменная задача про простые числа.

Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами. Тогда среди простых делителей его значений $f(1), f(2), \dots$ существует бесконечное число различных.

Докажите это утверждение, если а) $n = 1$ б) $n = 2$ в) n — произвольное натуральное число.

(Примечание редактора: это одна письменная задача, а не три).

Задачи про простые числа

Спасение утопающих - дело рук самих утопающих.

1. Докажите бесконечность множества простых вида $2008k + 1$.

2. Найти все отрезки вида $n + 1$, $n + 2$, $\ldots$, $n + 100$ с максимальным возможным числом простых чисел.

3. Найдите все арифметические прогрессии вида $p(p + 1) < q(q + 1) < r(r + 1)$, где p, q, r — простые.

4. Решите $\pi(x) = \frac{x}{3}$.

   Пусть $\sigma(n)$ — сумма всех натуральных делителей числа n.

5. Докажите, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ уравнение

$$\sigma(x_1 + \cdots + x_k) = \sigma(x_1) + \cdots + \sigma(x_k)$$

   разрешимо в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$

6. Докажите, что в бесконечной последовательности $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, $\ldots$, $\sigma(n)$, $\ldots$ имеется бесконечно много точных квадратов.

Литература:

Боро и др. Живые числа. Пять экскурсий.

И.Р.Шафаревич. Избранные шлавы алгебры. (Мат. образование №1, 1998).