МИНИКУРС ПО АЛГЕБРЕ. А. СКОПЕНКОВ [1)]

Сегодня основная масса учащихся решает алгебраические задачи относительно плохо. Это связано с ухудшением качества школьного образования при сохранении кружкового. Для успешного решения олимпиадных задач алгебраического и теоретико-числового типа всячески рекомендуем нарабатывать культуру арифметических выкладок. (*А. Я. Канель-Белов.*)

Деление многочленов с остатком (8–9)

1. а) Вычислите значение функций

$$P(x) = 2x^3 - 27x^2 + 141x - 256 \quad \text{при } x = 16$$

и

$$Q(x) = x^4 + \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 1 \quad \text{при } x = -\frac{3}{4}.$$

Указание:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Этот способ вычисления значения многочлена в точке называется *схемой Горнера.*

б) Сколько операций сложения и умножения нужно для вычисления значения функции $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_1 x + a_0$ «напрямую»? А сколько — по схеме Горнера?

Многочленом (в алгебраическом смысле, с вещественными коэффициентами) называется бесконечный упорядоченный набор $(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ вещественных чисел, среди которых лишь конечное количество отличны от нуля. Поставим в соответствие многочлену (т. е. набору) $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ функцию $\overline{P}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой $\overline{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ (эта сумма конечна). Поэтому многочлен $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ обычно записывают в виде $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, т. е. так же, как $\overline{P}$. Однако будем различать P и $\overline{P}$ — пока не доказано, что это «одно и то же» (4 б)) или в тех обобщениях, где это не «одно и то же» (4 в)). *Корнем* многочлена $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ называется такое число x_0, что $a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = 0$.

2. Дайте определения степени, суммы и произведения многочленов.

3. Пусть P — многочлен и a — число.

а) **Теорема Безу.** Существует такой многочлен Q, что $P = (x - a)Q + P(a)$. (Иными словами, многочлен $P - P(a)$ делится на $x - a$.) Более того, можно считать, что $\deg Q < \deg P$. Здесь $\deg P$ — *степень многочлена* P, т. е. наибольшее такое число n, что коэффициент a_n ненулевой.

б) **Следствие.** Если $P(a) = 0$, то существует такой многочлен Q, что $P = (x - a)Q$.

4. а) Многочлен степени $n > 0$ имеет не более n корней.

б) Если значения двух многочленов в любой точке совпадают, то эти многочлены равны. (Иными словами, если P, P_1 — многочлены и $P(x) = P_1(x)$ для любого x, то $P = P_1$).

в)* Утверждение б) неверно для *многочленов над* $\mathbb{Z}_p$ (определите сами, что это такое).

г) Если значения двух многочленов степени n совпадают в $n + 1$ различной точке, то эти многочлены равны.

д) Докажите тождество:

$$\frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \\ + \frac{b(x-d)(x-c)(x-a)}{(b-d)(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-d)(x-b)(x-a)}{(c-d)(c-b)(c-a)} = x.$$

5. Пусть P — многочлен. Если $a_1, \ldots, a_k$ — различные числа, для которых $P(a_i) = 0$, то P делится на $(x - a_1) \ldots$ $\ldots (x - a_k)$.

6. а) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с вещественными коэффициентами.

б) Верна ли теорема о делении с остатком для многочленов с рациональными коэффициентами?

в) А с целыми коэффициентами?

г) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с целыми коэффициентами, если старший коэффициент делителя равен единице.

Зачетные задачи: 1 б); 2; 3 а), б); 4 а), б), г), д); 5; 6 а)–г). Из них письменно: 3 а); 6 в).

[1)] Последний раздел написан И. Н. Шнуриковым. Некоторые решения написаны М. В. Прасоловым и М. Б. Скопенковым.

Рациональные и иррациональные числа (8–10)

1. Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии (ни в каком порядке; даже не подряд идущими членами).

Число называется *рациональным*, если его можно представить как отношение целых чисел, и *иррациональным* в противном случае.

(Не изучавшие тригонометрических функций могут игнорировать задачи 2(i)-(m) *и* 4 а)–в).)

2. Рациональны ли следующие числа?
(a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt[n]{k}$, где целое $k \geqslant 2$ не является n-й степенью целого числа; (c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
(d) $\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$; (e) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}$; (f) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; (g) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;
(h) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$; (i) $\cos 60°$; (j) $\sin 60°$; (k) $\cos 36°$; (l) $\cos 20°$; (m) $\sin 10°$.

3. а) **Теорема о целых корнях.** Пусть $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ для целых $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, x$. Тогда a_0 делится на p.
б) **Теорема о рациональных корнях.** Пусть $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\ldots+a_1x+a_0$ для целых $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и несократимой дроби $x=p/q$. Тогда a_0 делится на p и a_n делится на q.
в) В условиях пункта б) для любого целого k число $a_nk^n++a_{n-1}k^{n-1}\ldots+a_1k+a_0$ делится на $p-kq$.

4. а) На клетчатой бумаге нельзя выбрать три узла, являющиеся вершинами правильного треугольника.
б)* Какие правильные многоугольники можно нарисовать на клетчатой бумаге с вершинами в узлах?
в)* При каких целых n число $\cos n°$ рационально?

Зачетные задачи: для 8 класса: 2(b)-(h); 3 а), б), в). Из них письменно: 2g и 3в.
Для 9 класса: 2(c)-(i); 3 б), в); 4a. Из них письменно: 2g и 4a.
Для 10 и 11 класса: будут объявлены дополнительно.

Указания и решения

2. *Ответы*: (abcdhjklm) нет; (efgi) да. Приведем указания.
(a) Приведем доказательство того, что число $\sqrt{2}$ иррационально (известное еще древним грекам). Предположим обратное: пусть $\sqrt{2}=p/q$, где p/q — несократимая дробь. Возведем данное равенство в квадрат и домножим обе части на q^2. Получим: $2q^2=p^2$. Так как числа p и q целые, то из полученного равенства заключаем, что число p четное. Значит, $p=2r$, где r — некоторое целое число. Подставляя это выражение в наше равенство, получим $2q^2=(2r)^2$. Сокращая на 2, имеем $q^2=2r^2$. Так как q и r — целые числа, то число q четное. В итоге мы получили, что оба числа p и q четные. Это противоречит нашему предположению, что дробь p/q несократима. Полученное противоречие доказывает, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

$$(e) \qquad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+2\sqrt{6}=\frac{5+2\sqrt{6}}{-1}+2\sqrt{6}=-5.$$

(f) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}=1$.
(g) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.
(h) *Первое указание.* Возведите равенство $r-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$ в куб и получите противоречие.
Второе указание. Число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ является корнем многочлена $((x-\sqrt{2})^3-2)((x+\sqrt{2})^3-2)$ с рациональными коэффициентами. По теореме о рациональных корнях (3б) у него нет рациональных корней.
(i) $\cos 60°=1/2$.
(j) $\sin 60°=\sqrt{3}/2$.
(k) $\cos 36°=(\sqrt{5}+1)/4$.
(l) Выразите $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$. Если для несократимой дроби p/q выполнено $4(p/q)^3-3(p/q)=-1/2$, т.е. $8p^3-6pq^2+q^3=0$, то 1 делится на p и 8 делится на q.
(m) Аналогично (l).

Решение уравнений 3-й и 4-й степени (9−10). 1-я серия

1. (a) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y=-2x^3-6x^2+4$.
(b) График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

2. Найдите количество решений уравнения $x^3+px+q=0$ (в зависимости от параметров p, q). В этой задаче (и в задаче 8 ниже) можно пользоваться без доказательства теоремой о промежуточных значениях многочлена.

3. $\sqrt[3]{2+\sqrt5}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}=1$.

4. (a) Разложите на множители выражение $a^3+b^3+c^3-3abc$.
(b) Разложите выражение $a^3+b^3+c^3-3abc$ на линейные множители с комплексными коэффициентами.

5. (a) Найдите хотя бы одно решение уравнения $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.
(b) Решите уравнение $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.

6. Решите уравнение (a) $(x^2+2)^2=18(x-1)^2$.
(b) $x^4+4x-1=0$.
(c) $x^3-3x-1=0$.

Многие из вышеприведенных задач сложны. Следующие задачи (из второй и третьей серии) являются подсказками.

Решение уравнений 3-й и 4-й степени (9−10). 2-я серия

7. (a) Уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ сводится к уравнению $x^3+px+q=0$.
(b) Уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ сводится к уравнению $x^4+px^2+qx+r=0$.

8. Сколько корней имеет уравнение
(a) $x^3+2x+7=0$?
(b) $x^3-3x+1=0$?

Указание к 5a. Так как $(b+c)^3=b^3+c^3+3bc(b+c)$, то число $b+c$ — корень уравнения $x^3-3bcx-(b^3+c^3)=0$.

9. (a) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. Когда достигается равенство?
(b) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ при $a, b, c>0$.

10. Метод дель Ферро. Напишите формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ методом задачи 5. При каком условии применим этот метод, если квадратные корни разрешается извлекать только из положительных чисел?

11. Калькулятор имеет кнопки 1, $+$, $-$, $\times$ и $:$. Калькулятор вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 он выдает ошибку.

(a) Докажите, что любое кубическое уравнение можно решить на калькуляторе, если дополнительно разрешается два раза извлечь корень из положительного числа.

(b)* Какие кубические уравнения можно решить на калькуляторе, если дополнительно разрешается один раз извлечь корень из положительного числа?

Решение уравнений 3-й и 4-й степени (9−10). 3-я серия

Указание к 6b. Подберите такие α, b, c, чтобы $x^4+4x-1=(x^2+\alpha)^2-(bx+c)^2$. Для этого найдите хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2+\alpha)^2-(x^4+4x-1)$ является полным квадратом.

12. Метод Феррари. (a) Решите уравнение $x^4+2x^2-8x-4=0$.

(b) Найдите формулу для корней уравнения $x^4+px^2+qx+r=0$ методом задачи 6ab, использующую корень α вспомогательного кубического уравнения. Не забудьте разобрать все случаи!

13. Метод Виета. (a) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.
(b) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ и $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.
(c) Решите уравнение $4x^3-3x=\dfrac12$.

(d) Используя функции cos и arccos, напишите общую формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ методом задачи 13c. При каком условии уравнение $x^3+px+q=0$ решается этим методом?

Указания и решения

4. Поделите $a^3-3abc+(b^3+c^3)$ на $a+b+c$ ‘уголком’. *Ответ*:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon),\quad \text{где}\quad \varepsilon=(1+i\sqrt3)/2.$$

5. *Ответ*: $x=-1-\sqrt[3]{2}$.
(a) *Указание.* $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=x^3-3bcx+(b^3+c^3)$, где $b=1$, $c=\sqrt[3]{2}$.

(b) В силу задачи 4 уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$ равносильно уравнению

$$(x+b+c)(x^2+b^2+c^2-bc-bx-cx) = 0 \quad \text{с} \quad b=1 \quad \text{и} \quad c=\sqrt[3]{2}.$$

По задаче 9a второй сомножитель положителен при любом x (поскольку $b \neq c$). Значит, исходное уравнение имеет единственное решение $x = -b-c = -1-\sqrt[3]{2}$.

6. *Ответы*: (a) $(-3\sqrt{2} \pm \sqrt{10+12\sqrt{2}})/2$; (b) $(-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2})/2$.
(c) *Указание.* Сведите к 13c заменой $y = 2x$. *Ответ*: $2\cos\frac{\pi}{9}$, $2\cos\frac{7\pi}{9}$, $2\cos\frac{13\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi}{9}$.

7. Воспользуйтесь заменой переменной $y := x + \frac{b}{3a}$ или $y := x + \frac{b}{4a}$.

8. (a) *Ответ*: 1. Так как $f(-2) < 0$ и $f(1) > 0$, то по теореме о промежуточных значениях многочлена корень имеется. Ввиду монотонности корень только один.
(b)

Замечание к 12b. Уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ можно также решить, подобрав такие α, A, B, что

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 - (Ax+B)^2.$$

13. (c) *Ответ*: $\cos\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$, $\cos\frac{13\pi}{9} = \cos\frac{5\pi}{9}$.

Применения комплексных чисел (10–11)

Комплексным числом называется пара (a, b) вещественных чисел. Она записывается в виде $a + bi$. Сумма комплексных чисел определяется формулой $(a+bi)+(a'+b'i) = (a+a')+(b+b')i$, а произведение — формулой $(a+bi)(a'+b'i) = (aa'-bb')+(ab'+a'b)i$.

Другие начальные сведения о комплексных числах можно найти, например, в учебнике Н. Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ», 11 класс.

1. а) Для любого комплексного числа z существуют такие вещественные $r \geqslant 0$ и φ, что $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Единственны ли r и φ?
б) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$.
в) Для каждого целого $n > 0$ решите уравнение $z^n = 1$ в комплексных числах z.

2. Разложите на квадратные трехчлены и линейные двучлены с *вещественными* коэффициентами:
а) $x^4 + 4$; б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; в) $x^n - 1$.

3. Определение многочлена см. выше в теме «Деление многочленов с остатком».
а)* Основная теорема алгебры. Непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами всегда имеет комплексный корень. Примечание: эту задачу можно, не доказывая, использовать в других.
б) Многочлен с комплексными коэффициентами степени n (т. е. такой, что $a_n \neq 0$) имеет ровно n корней с учетом кратности. (Корень z_0 многочлена P *имеет кратность* k, если P делится на $(z-z_0)^k$ и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$.)
в) Если $z_1, \ldots, z_n$ — корни многочлена P со старшим коэффициентом a_n, причем каждый корень выписан столько раз, какова его кратность, то $P(z) = a_n(z-z_1)\ldots(z-z_n)$.

4. Обозначим $\overline{a+bi} := a - bi$.
а) Для любого многочлена P с вещественными коэффициентами выполнено $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.
б) Любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с вещественными коэффициентами.
в) Если для многочлена P с вещественными коэффициентами $P(x) > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, то $P = Q^2 + R^2$ для некоторых многочленов Q, R с вещественными коэффициентами.

5* Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству $P(x^2+x+1) \equiv$ $\equiv P(x)P(x+1)$.

6. а) Выразите $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.
б) Докажите, что $\cos n\varphi$ и $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ — многочлены от $\cos\varphi$.

7. Найдите: а) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos k\varphi$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \sin k\varphi$; в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{3^k}$.
Указание. Обозначим $\mathrm{Re}(a+bi) := a$ для вещественных a и b. Используйте тот факт, что $\cos k\varphi = \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k$.

8. а) $\mathrm{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \mathrm{ctg}^2 x + 1$.
Указание: используйте $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$.
б) $\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} \mathrm{ctg}^{2n-2j} \frac{\pi k}{2n+1} = 0$ для любого $k = 1, \ldots, n$.

в) $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\pi k}{2n+1} = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

д)* Найдите $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^4}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^6}$, …

9. а) Каким геометрическим преобразованием плоскости $\mathbb{C}$ получается число iz из числа z?

б) Обозначим $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Каков геометрический смысл умножения на $e^{i\varphi}$? на $re^{i\varphi}$?

в) Выразите число w, полученное из числа z поворотом на угол φ против часовой стрелки относительно центра z_0 (через z, z_0 и φ).

г) Композиция поворотов плоскости (с различными центрами) — поворот или параллельный перенос.

11. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = x_n\sqrt{\dfrac{x_n + x_{n-1}}{2x_{n-1}}}$ и

а) $x_0 = 1$, $x_1 = 1/2$; б) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

12. Найдите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 4y_n, \\ y_{n+1} = 3y_n + 4x_n \end{cases}$ и

а) $x_0 = 1$, $y_0 = 0$; б) $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Зачетные задачи. 10 класс: 1 в); 2 б), в); 3 б), в); 4 б), в); 6 а); 7 а), б); 8 б), в). Из них письменно: 3 б); 4 б).
11 класс: 8 а), г); 9 б)–г); 10 а), б); 11 а), б); 12 а), б). Из них письменно: 9 в); 12 а).

Указания и решения

7. *Ответы.* а) $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

б) $\dfrac{2^{n+2}\sin n\varphi - 2^{n+1}\sin(n+1)\varphi + 2\sin\varphi}{5-4\cos\varphi}$.

в) $\dfrac{9-3\cos\varphi}{10-6\cos\varphi}$.

9. а) *Ответ*: поворотом на 90° вокруг начала координат против часовой стрелки.

Поскольку $|iz| = |z|$, то при данном преобразовании расстояние от точки z до начала координат сохраняется. Поскольку $\operatorname{Arg}(iz) = \operatorname{Arg}(z) + \pi/2$, то ориентированный угол между лучами, идущими из начала координат в точки z и iz, равен $+\pi/2$. Значит, по определению, точка iz получается из точки z указанным поворотом.

10. а) *Примечание.* На плоскости существует комплексная система координат, для которой A, B, C имеют координаты 0, 1, c соответственно.

Диагонали правильных многоугольников (10–11)

И. Н. Шнурников

Наша цель — определить, какие и сколько диагоналей правильного n-угольника могут пересекаться в одной точке. Задачи 3, 5, 7 описывают возможные точки пересечения, а задачи 9 и 10 нужны для доказательства невозможности иных точек пересечения (которое завершается перебором случаев на компьютере).

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80°. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCB = 10°$. Докажите, что $\angle AMC = 70°$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что треугольник ABP равносторонний. Докажите, что $\angle PCD = 15°$.

3. Докажите, что диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ правильного $2n$-угольника пересекаются в одной точке.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60°$ и $\angle ECA = 50°$. Докажите, что $\angle ADE = 30°$.

5. Докажите, что диагонали A_1A_7, A_3A_{11} и A_5A_{21} правильного 24-угольника пересекаются в точке, лежащей на диаметре A_4A_{16}.

6. Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$. На сторонах BA и BC взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DCA = 50°$ и $\angle EAC = 40°$. Докажите, что $\angle AED = 30°$.

7. Докажите, что в правильном 30-угольнике семь диагоналей

$$A_1A_{13},\ A_2A_{17},\ A_3A_{21},\ A_4A_{24},\ A_5A_{26},\ A_8A_{29},\ A_{10}A_{30}$$

пересекаются в одной точке.

8* Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 14^\circ$, $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 104^\circ$. На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DBC = 50^\circ$ и $\angle ECB = 94^\circ$. Докажите, что $\angle CED = 34^\circ$.

9. Докажите, что при простом p в правильном p-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке внутри p-угольника.

Указание: если не получается, то смотрите дальше.

Теорема. *Максимальное количество диагоналей правильного n-уголь- ника, пересекающихся в одной точке, отличной от центра, равно*:

2, *если n нечетно*;
3, *если n четно и не делится на* 6;
5, *если n делится на* 6 *и не делится на* 30;
7, *если n делится на* 30.

10* а) Докажите, что если для простого числа p многочлен $S(x)$ с целыми коэффициентами степени не более $2p-1$ имеет корень $e^{\frac{i\pi}{p}}$, то

$$S(x) = a(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2p-2}) + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(x^j + x^{p+j})$$

для некоторых $a, a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$.

б) Отличный от тождественного нуля многочлен $S(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j x^j$ с неотрицательными целыми коэффициентами называется k-*минимальным*, если $S(e^{\frac{2\pi i}{k}}) = 0$ и не существует таких целых $0 \leqslant b_j \leqslant a_j$, что многочлен $\sum\limits_{j=1}^{k} b_j x^j$ тоже имеет корень $e^{\frac{2\pi i}{k}}$, причем не все b_j равны нулю и не все b_j равны a_j.

Докажите, что для каждого k-минимального многочлена $S(x)$ существуют различные простые числа $p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant k$, целые числа m, l и $p_1p_2\ldots p_s$-минимальный многочлен $S_1(x)$ такие, что $S(x) = x^l \cdot S_1(x^m)$.

в) Для k-минимального многочлена $S(x)$ выберем $p_1p_2\ldots p_s$-минимальный многочлен $S_1(x)$ с минимальным p_s при условии $p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant k$ и $S(x) = x^l \cdot S_1(x^m)$.

Пусть для выбранного $S_1(x)$ оказалось $p_1 = 2$ и $S(1) < 2p_s$. Тогда найдутся целые числа $l, r < p_s$ и $p_1p_2\ldots$ $\ldots p_{s-1}$-минимальные многочлены $T_1, T_2, \ldots T_r$ такие, что

$$S(x) = x^l \cdot \sum_{j=1}^{r} T_j^j(x) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{r} T_j(1) = 2r + S(1) - p_s.$$

г) Докажите, что существует ровно 107 k-минимальных многочленов (со всеми возможными k), значения которых в 1 не превосходят 12.

Указания

1, 2, 4. Можно свести задачу к пересечению диагоналей в правильном n-угольнике, но проще решить дополнительным построением.

3, 5, 7. Решаются теоремой Чевы в синусах.

6. Сводится изогональным сопряжением к предыдущим.

9. Перепишите теорему Чевы в синусах для точки пересечения трех различных диагоналей правильного n-угольника в виде соотношения $\sum\limits_{j=1}^{6} e^{i\pi x_j} + \sum\limits_{j=1}^{6} e^{-i\pi x_j} = 0$, в котором шесть чисел x_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$, определяются формулой (ее надо найти) и удовлетворяют равенству $\sum\limits_{j=1}^{6} x_j = 1$.