

Криволинейные треугольники и неевклидова геометрия

М. Скопенков

Основной пример. При многократных отражениях относительно сторон правильного треугольника на плоскости получается разбиение плоскости на бесконечное число правильных треугольников.

Криволинейным треугольником назовем фигуру, составленную из трех дуг окружностей a , b и c . *Отражением* относительно стороны криволинейного треугольника назовем инверсию относительно соответствующей окружности.

Основной вопрос. Что получится в результате многократного отражения относительно сторон данного *криволинейного* треугольника Δ ?

1. Ответьте на этот вопрос в случае, когда Δ — правильный криволинейный треугольник с тремя углами по 90° (нарисуйте получающуюся картинку).
2. Пусть Δ — правильный криволинейный треугольник с нулевыми углами. Докажите, что его образы при многократных отражениях лежат внутри его описанной окружности.
3. Пусть Δ — правильный криволинейный треугольник, все три угла которого $< 60^\circ$.
 - a) Докажите, что существует окружность d , перпендикулярная всем трем его сторонам a , b и c .
 - b) Любая композиция отражений относительно a , b и c оставляет окружность d на месте.
 - c) Образы треугольника Δ при многократных отражениях лежат внутри круга, ограниченного окружностью d .
4. Пусть Δ — криволинейный треугольник с суммой углов $< 180^\circ$. Докажите, что все его образы при многократных отражениях содержатся в некотором круге.
5. Пусть Δ — криволинейный треугольник с суммой углов 180° .
 - a) Докажите, что три его стороны a , b и c пересекаются в одной точке.
 - b) Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом его образов при многократных отражениях.
 - c) Докажите, что все его образы при многократных отражениях покрывают плоскость.
6. Назовем *биссектрисой* двух пересекающихся окружностей окружность, проходящую через обе точки их пересечения и делящую угол между ними пополам. Докажите, что три биссектрисы криволинейного треугольника с суммой углов 180° пересекаются в одной точке.
7. Пусть Δ — 'осьмушка' сферы. Какая картинка на сфере получится при многократных отражениях относительно плоскостей, содержащих стороны 'треугольника' Δ ? Сравните результат с ответом в задаче 1.
8. Пусть Δ — криволинейный треугольник с суммой углов $> 180^\circ$, пусть a , b и c — его стороны.
 - a) Докажите, что при стереографической проекции на некоторую сферу, касающуюся плоскости в радикальном центре трех окружностей a , b и c , эти окружности переходят в большие окружности сферы.
 - b) Докажите, что плоскость покрывается конечным числом образов треугольника Δ при многократных отражениях.
9. Докажите, что три биссектрисы криволинейного треугольника с суммой углов $> 180^\circ$ пересекаются в одной точке.