ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГАЛУА В ИНТЕРЕСНЫХ ЗАДАЧАХ

материалы Г.Р. Челнокова, записанные А. Скопенковым [1]

Введение. Этот миникурс предназначен осветить отправные идеи теории Галуа в следующем ключе. Предложены задачи, формулировки которых элементарны (понятны школьникам). Однако, если Вы их решили, то Вы придумали отправные идеи теории Галуа. Естественно, не следует считать, что на этом изучение теории Галуа должно заканчиваться! Придуманные идеи еще надо вычленить, сформулировать в максимально удобном для многократного использования виде... Да и просто перевести с языка, на котором они придуманы, на общепринятый [Kh]. Но, тем не менее, первый этап важен. См. также [KS, S1, S2, S3].

1-я серия. Почти симметрические многочлены.

Задача 0. (a) Представьте $a^2+b^2+c^2$ и $a^3+b^3+c^3$ в виде многочленов от $a+b+c$, $ab+bc+ca$ и abc.

(b)* Сформулируйте и докажите основную теорему о симметрических многочленах для двух и для трех переменных (если не получается, подождите подсказок на одном из следующих занятий).

В задаче 1.a,b,c требуется прежде всего придумать формализацию понятий 'найти' и 'выразить'. Тем самым Вы на простом примере нащупаете основное определение (комплексной выразимости при помощи радикалов). Само решение не должно представлять для Вас больших проблем.

Задача 1.a. Всегда ли можно, зная $a+b$ и ab, найти $a-b$? А a?

Вот простейшая формализация понятия 'найти': *существует ли отображение $f: R^2 \to R$, для которого $f(a+b,ab)=a-b$ при любых $a,b\in R^2$?*

Задача 1.b. Как выразить $a-b$ через $a+b$ и ab? А a?

Вот один из способов это формализовать. Имеется калькулятор с кнопками

$$1,\quad +,\quad -,\quad \times,\quad :\quad \text{и}\quad \sqrt[n]{}\quad \text{для любого } n.$$

Калькулятор оперирует с вещественными числами, вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 или извлечении корня из отрицательного числа он выдает ошибку и прекращает работу. *Выразимостью x через $a_1,\dots,a_k$ с использованием вещественных корней (радикалов)* называется наличие программы для калькулятора, которая по вводимым значениям $a_1,\dots,a_k$ выдает конечное множество, содержащее x.

Замечание. Вот другой способ формализации задачи 1b, который не используется в дальнейшем: *существует ли такое отображение f из R^2 в множество 2^R_{fin} всех конечных подмножеств множества R, что $f(a+b,ab)\ni a-b$ при любых $a,b\in R$?* Поясним, почему этот вопрос (и даже его обобщения на несколько переменных) тривиален.

Отображения $f: R^2\to 2^R_{fin}$ (т.е. вещественные многозначные функции) можно задавать формулами. Например, формула $f(x)=\pm x$ является сокращением формулы $f(x)=\{x,-x\}$, задающей (не более, чем) двузначное отображение f. (Подумайте, скольки значное отображение задает формула $f(x)=\dfrac{\pm x}{\pm x}$.) Обозначим через $f(p,q)$ (конечное) множество (вещественных) решений уравнения $x^2+px+q=0$. Тогда формула $a-b=f(a+b,ab)-f(a+b,ab)$ задает искомое отображение (подумайте, как!).

При решении задачи 1b Вы испытали дискомфорт, связанный с тем, что для некоторых $p,q\in R$ не существует таких $a,b\in R$, что $a+b=p$ и $ab=q$. В математике часто

[1] Обновляемая версия: www.mccme.ru/circles/oim/grishalois.pdf

решать задачу о комплексных числах проще, чем аналогичную задачу о действительных. Поэтому будем решать все задачи в комплексной версии. Так нам проще будет нащупать основные идеи, а потом можно будет вернуться к вещественным версиям (ведь часто именно вещественная версия интересна для приложений).

Задача 1.c. Придумайте и решите комплексный аналог задачи 1b.

Вот определение, необходимое для *четкой формулировки.* Имеется (другой) калькулятор с кнопками

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{\ } \quad \text{для любого } n.$$

Калькулятор оперирует с комплексными числами и при нажатии кнопки $\sqrt[n]{\ }$ выдает все значения корня (и как-то их случайно нумерует $z_1, z_2, \ldots, z_n$). Калькулятор вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 он выдает ошибку и прекращает работу. *Выразимостью x через $a_1, \ldots, a_k$ с использованием комплексных корней (радикалов)* называется наличие программы для калькулятора, которая по вводимым значениям $a_1, \ldots, a_k$ выдает конечное множество, содержащее x. Слово 'комплексных' мы будем опускать.

Задача 2. (a) Всегда ли можно, зная $a+b+c$, $ab+bc+ca$ и abc, найти $a/b+b/c+c/a$? (Понятие 'найти' определено после условия задачи 1a.)

(b) Выразите $a/b+b/c+c/a$ через $E_3 := \{a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc\}$ с использованием корней.

Аналогично, *выразимостью x через $a_1, \ldots, a_k$ с использованием операций $T_1, \ldots, T_n$* называется наличие программы для калькулятора с кнопками $+, -, \times, :, T_1, \ldots, T_n$ (вычисляющего с абсолютной точностью и имеющего неограниченную память), которая по вводимым значениям $a_1, \ldots, a_k$ выдает конечное множество, содержащее x.

Задача 2. (c) Выразите $a/b+b/c+c/a$ через E_3 с использованием квадратных корней.

(d) Выразите $(a-b)(b-c)(c-a)$ через E_3 с использованием квадратных корней.

(e) Выразите $a/b+b/c+c/d+d/a$ через

$$E_4 := \{a+b+c+d,\ ab+ac+ad+bc+bd+cd,\ abc+abd+acd+bcd,\ abcd\}$$

с использованием квадратных и кубических корней.

(f) Выразите одновременно $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$ и $\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{c+3a}+\dfrac{c}{a+3b}$ через E_3 с использованием одного квадратного корня.

Здесь и далее 'одного' означает 'однократного применения в программе'.

(g)* Выразите $a/b+b/c+c/d+d/a$ через E_4 с использованием одного кубического и двух квадратных корней.

Вряд ли у Вас получится решить какую-либо задачу со звездочкой из этого листка без решения некоторых из следующих за ней.

Задача 3. Отображение $f : C^n \to C$ называется *циклически симметричным*, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3 \ldots, x_{n-1}, x_n, x_1)$ для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$.

Выразите $x_1x_3+x_3x_5+...+x_9x_1$ через некоторые циклически симметричные многочлены от $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ с использованием квадратных корней.

Следующие задачи 4a и 5a полезны для решения задачи 2g.

Задача 4. Выразите корни уравнения $z^3+pz+q=0$ через p и q с использованием

(a) одного кубического корня и одного квадратного.

(b) одного 'двухэтажного' извлечения корня (т.е. извлечения корня из выражения, содержащего корни) и одного одноэтажного.

Задача 7. (a) Suppose that P is a polynomial with rational coefficients, $a, b, c \in Q$ and $P(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) = 0$. Prove that

$$P\left(a + b\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2} + c\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{4}\right) = 0.$$

(b) Придумайте $s \neq 0$ и функцию $f : C^3 \to C$, для которых $f(a, b, c) = sf(b, c, a)$ при любых $a, b, c \in C$.

(c) Придумайте функцию $f : R^3 \to R - \{1/\sqrt{3}\}$, для которой $f(a, b, c) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg} f(b, c, a))$ при любых $a, b, c \in R$.

Указание. Осознайте, что $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} + x)$ есть рациональная функция от x.

Указания.

2.b. Обозначим $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ и $r = abc$. Напишем формулу Кардано $a = f(p, q, r)$. Тогда формула $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{f}{f} + \dfrac{f}{f} + \dfrac{f}{f}$, где $f = f(p, q, r)$, задает искомую программу (подумайте, как!).

2.c. Обозначьте $X_1 = a/b + b/c + c/a$ и $X_2 = a/c + c/b + b/a$.

2.d. Возведите в квадрат.

2.e. Аналогично 2b с использованием формулы дель Ферро.

3. Обозначьте $X_1 = x_1x_3 + x_3x_5 + ... + x_9x_1$ и $X_2 = x_2x_4 + x_4x_6 + ... + x_{10}x_2$. Далее аналогично задаче 2c.

2.c (Набросок решения.) Обозначим $X_1 = a/b + b/c + c/a$ и $X_2 = a/c + c/b + b/a$. Заметим, что $X_1 + X_2$ и X_1X_2 являются симметрическими функциями от a, b, c. Значит, они являются многочленами от $a + b + c$, $ab + bc + ca$ и abc (найдите эти многочлены). Само же X_1 может быть выражено через $X_1 + X_2$ и X_1X_2 по формуле корней квадратного уравнения, то есть с одним квадратным корнем.

Литература.

[Kh] А.Г. Хованский, Топологическая теория Галуа, Москва, МЦНМО, 200?

[KS] П. Козлов и А. Скопенков, В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач), Мат. Просвещение, 12 (2008), 127–144, http://arxiv.org/abs/0804.4357

[S1] А. Скопенков, Философски-методическое отступление, в кн. Сборник материалов московских выездных математических школ. Под редакцией А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова, Москва, МЦНМО, 2009. http://www.mccme.ru/circles/oim/mvz.pdf (засмотрено 23.08.2010)

[S2] A. Skopenkov, Yet another proof from the Book: the Gauss theorem on regular polygons, http://arxiv.org/abs/0908.2029

[S3] А. Скопенков, Простое доказательство теоремы Абеля о неразрешимости уравнений в радикалах, www.mccme.ru/circles/oim/abel.pdf