ПЕРЕСТАНОВКИ И ИХ ДЕЙСТВИЯ. А. Скопенков.

Две приводимые подборки задач независимы друг от друга и не требуют для решения каких-либо предварительных знаний. Первая подборка посвящена простейшим свойствам перестановок. Вторая подборка посвящена подсчетам числа классов эквивалентости (т.е. раскрасок и т.д.). На примере такого подсчета читатель подводится к важным понятиям группы и действия группы на множестве, а также к элементарной формулировке леммы Бернсайда. (Чтобы сделать этот и другие результаты менее доступными, их обычно формулируют и доказывают на языке абстрактной теории групп. Ср. [A, стр. 49, комментарий к задаче 5].)

Миникурс 'Рождение понятия группы' можно составить из настоящего текста, статей [KS], [B] и пунктов 'Миникурс по геометрическим преобразованиям', 'Малая теорема Ферма', 'Квадратичные вычеты', 'Первообразные корни' сборника [Z]. Ср. [KS].

Общее замечание к формулировкам задач: если условие задачи является утверждением, то в задаче требуется это утверждение доказать.

Благодарю И. Григорьева и М. Скопенкова за полезные замечания и обсуждения.

1 Перестановки (8-9)

1-я серия.

1.1. Пятнадцать школьников сидят на пятнадцати пронумерованных стульях. Каждую минуту добрый преподаватель пересаживает их по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 8 & 11 & 14 & 15 & 6 & 13 & 1 & 4 & 9 & 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Через сколько минут все школьники впервые окажутся на своих первоначальных местах?

Перестановкой множества называется запись элементов этого множества в произвольном порядке. Более строго, *перестановкой* множества называется взаимно-однозначное отображение этого множества на себя (т.е. биекция). Перестановку f удобно изображать в виде ориентированного графа, вершины которого — элементы множества, а ребра идут из вершины a_k в вершину $f(a_k)$. Перестановка множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, переводящая a_k в $f(a_k)$, записывается в виде $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}$ (обычно $a_k = k$). Обозначим через $(a_1a_2\dots a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ *цикл.*

Композицией перестановок f и g называется перестановка $f \circ g$, определенная формулой $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

1.2. Найдите (a) $(12) \circ (13)$; (b) $(12) \circ (23)$; (c) $(23) \circ (12)$; (d) $(123) \circ (132)$; (e) $(12) \circ (13) \circ (12)$; (f) $(12345) \circ (12)$; (g) $(12345) \circ (56789)$.

Ответ дайте в виде композиции непересекающихся циклов. Например, $(123) \circ (234) = (12) \circ (34)$.

Далее знак композиции опускается.

Порядком перестановки f называется наименьшее k, для которого $f^k = \mathrm{id}$ (т.е. для которого после k-кратного применения перестановки f каждый элемент перейдет в себя).

1.3. (7,10,12,11) Придумайте перестановки 9-элементного множества порядков 7, 10, 12, 11.

1.4. Чему равен порядок композиции непересекающихся циклов из $n_1, ..., n_k$ элементов, соответственно?

Такие перестановки $(n_1 + ... + n_k)$-элементного множества называются перестановками *типа* $\langle n_1, ..., n_k\rangle$.

---

[0]Обновляемую версию см. на www.mccme.ru/circles/oim/materials/groups.pdf.

1.5. Найдите число перестановок типа (a) $\langle 2,3\rangle$; (b) $\langle 3,3\rangle$; (c) $\langle 1,2,3,4\rangle$.

1.6. Любую перестановку можно представить в виде композиции

(a) непересекающихся циклов.

(b) транспозиций, т.е. перестановок, каждая из которых меняет местами некоторые два элемента, а остальные оставляет на месте (иными словами, циклов длины 2).

(c) транспозиций $(1i)$, $i = 2, 3, \dots, n$.

1.7. Назовите *две* перестановки, композициями которых можно получить

(a) любую перестановку n-элементного множества.

(b) любой цикл длины 3 в n-элементном множестве (т.е. любую *четную* перестановку, см. ниже).

Перестановки a и b называются *сопряженными*, если $a = xbx^{-1}$ для некоторой перестановки x.

1.8. (a) Перестановки a и b сопряжены тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.

(b) Пусть a и x — произвольные перестановки n-элементного множества. Тогда

$$xax^{-1} = \begin{pmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(n) \\ x(a(1)) & x(a(2)) & \dots & x(a(n)) \end{pmatrix}.$$

Иными словами, циклическое разложение перестановки xax^{-1} получается из циклического разложения перестановки a заменой каждого элемента на его x-образ: если $a = \Pi_{j=1}^{q}(i_{j1}, i_{j2}, \dots, i_{js_j})$, то $xax^{-1} = \Pi_{j=1}^{q}(x(i_{j1}), x(i_{j2}), \dots, x(i_{js_j}))$.

(c) Найдите $gf^{-1}g^{-1}f$ для $f := (1, 2, \dots, N)$ и $g := (N, N+1, \dots, L)$.

Зачетные задачи для 8 класса: 1.2.def, 1.3.12, 1.4, 1.5.ab, 1.6.ab, 1.7.a, 1.8.a. Письменно: 1.5.b или 1.6.a по выбору школьника.

Зачетные задачи для 9 класса: 1.2.efg, 1.3.11, 1.4, 1.5.ac, 1.6.bc, 1.7.b, 1.8.b. Письменно: 1.5.c или 1.6.a по выбору школьника.

Для школьников, готовящих доклады, письменные задачи не обязательны.

2-я серия.

1.9. (a) Любую ли перестановку можно представить в виде композиции нескольких циклов длины 3?

(b) Любую ли перестановку можно представить в виде композиции четного числа транспозиций?

(c) *Игра в 15.* В квадратной коробочке размера 4×4 размещены 15 квадратных фишек размера 1×1 с номерами $1, 2, \dots, 15$, а одно место осталось свободным. Первоначально фишки расставлены так, как на рисунке справа. Можно ли, последовательно сдвигая фишки на свободное место, получить расстановку фишек на рисунке слева?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 14 & * \end{bmatrix}$$

Указание к 1.9: если не получается, читайте дальше.

Пусть f — перестановка множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Говорят, что пара (i, j), где $1 \le i, j \le n$, образует *беспорядок* для перестановки f, если $i < j$, но $f(i) > f(j)$.

Перестановка называется *четной*, если общее число ее беспорядков четно.

1.10. (a) Четен ли цикл длины n?

(b) Композиция четной (нечетной) перестановки и транспозиции нечетна (четна).

(c) Как определить четность композиции перестановок, зная четность сомножителей?

1.11. Каждое из следующих условий равносильно четности перестановки:

(a) Перестановку можно представить в виде композиции четного числа транспозиций.

(b) Любое представление перестановки в виде композиции транспозиций содержит четное их число.

(c) Перестановку можно представить в виде композиции нескольких циклов длины 3.

1.12. (a) Каких перестановок n-элементного множества больше: четных или нечетных?

(b) В какое минимальное количество транспозиций раскладывается перестановка n-элементного множества, состоящая из k непересекающихся циклов длины больше 1?

1.13. * [G1, G2] Перестановка x *порождается перестановками* $p_1, p_2, ..., p_k$, если $x = x_1 x_2 ... x_n$, где для любого $i \leq n$ верно $x_i = p_1$ или $x_i = p_2$...или $x_i = p_k$.

(a) Множество всех четных перестановок конечного множества порождается парой циклов длины хотя бы 2 каждый, имеющих ровно один общий элемент и содержащих все элементы множества.

(b) Если N или K четно, $N > 1$, $K > 1$,то циклами $(1, ..., N)$ и $(N, ..., N + K - 1)$ порождаются все перестановки $(N + K - 1)$-элементного множества.

(c) Если N и K нечетны, $N > 1$, $K > 1$,то циклами $(1, ..., N)$ и $(N, ..., N + K - 1)$ порождаются все четные перестановки $(N + K - 1)$-элементного множества и только они.

Зачетные задачи для 8 класса: 1.9.ab, 1.10.ab, 1.11.abc, 1.12.a. Письменно: 1.10.b.

Зачетные задачи для 9 класса: 1.9.abc, 1.10.ab, 1.11.ab, 1.12.b. Письменно: 1.9.c.

Ответы. 1.1. 105.
1.2. (132), (123), (132), id, (23), (1345), (123456789).
1.3.11. Нужной перестановки порядка 11 не существует.
1.4. НОК$(n_1, \ldots, n_k)$.
1.5. (a) 20; (b) ?; (c) 10!/4!.
1.7. (a) (12) и $(123 \ldots n)$. (Здесь (123) можно заменить на любую транспозицию.)
(b) (123) и $(1, 2, ..., n)$. (Здесь (123) можно заменить на любой цикл вида $(s, s + 1, s + 2)$.)
1.8.c. $(N - 1, N, N + 1)$.
1.9. (a,b,c) Нет.
1.10. (a) Четен при n нечетном и нечетен при n четном.
(b) Просуммировать четности сомножителей по модулю 2.
1.12. (a) Поровну. (b) $n - k$.

2 Комбинаторика классов эквивалентности (9–11)

1-я серия.

Здесь приведены несложные задачи, которые можно решить без идей, приводящих к лемме Бернсайда.

1. (a) Сколькими способами можно раскрасить незанумерованные грани куба в красный и серый цвета? Раскраски, совмещающиеся вращением пространства (т.е. движением пространства, сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми.

(b) Сколько существует различных (т.е. неизоморфных) неориентированных графов с 4 вершинами?

(c) Сколькими способами можно раскрасить в a цветов незанумерованные вершины правильного тетраэдра? Здесь раскраски, совмещающиеся движением пространства (не обязательно сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми.

(d) Число из (b) равно числу раскрасок полного графа на 4 вершинах в a цветов, где раскраски, совмещающиеся перестановкой вершин (т.е. автоизоморфизмом) этого графа, считаются одинаковыми.

2. Найдите число замкнутых ориентированных связных p-звенных ломаных с вершинами в вершинах данного правильного p-угольника (где p простое). Ломаные, совмещающиеся поворотом, неотличимы.

2-я серия.

3. Найдите число раскрасок карусели из n вагончиков в a цветов (т.е. количество раскрасок вершин правильного n-угольника в a цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы) для

(a) $n = 5$; (b) $n = 4$; (c) $n = 6$.

Аналогично придуманному Вами способу можно решить задачу 2 для произвольного n, однако решение будет громоздким. Приведем более простой (для "очень непростых" n) способ на примере решения задачи 2c.

Назовем *раскраской поезда* раскраску карусели из шести *занумерованных* вагончиков. (Тогда всего имеется a^6 раскрасок поезда из 6 вагончиков.)

Посчитаем двумя способами число P пар (α, s), в которых $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и α — раскраска поезда, переходящая в себя при циклическом сдвиге на s вагончиков.

Циклический сдвиг на s переводит в себя ровно $a^{(s,6)}$ раскрасок поезда, поэтому

$$P = a^6 + a + a^2 + a^3 + a^2 + a.$$

С другой стороны, обозначим через $d(\alpha)$ наименьшую положительную величину циклического сдвига, при котором раскраска α поезда переходит в себя. Тогда число тех $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, для которых циклический сдвиг на s вагончиков переводит раскраску α поезда в себя, равно $6/d(\alpha)$. Поэтому

$$P = \sum_{\text{раскраскам } \alpha \text{ поездов}} \frac{6}{d(\alpha)} = \sum_{\text{раскраскам } \beta \text{ каруселей}} d(\beta) \cdot \frac{6}{d(\beta)} = 6X.$$

Здесь X — искомое число раскрасок. Предпоследнее равенство выполнено, поскольку

• для раскрасок α и α' поезда, переводящихся друг в друга циклическими сдвигами, $d(\alpha) = d(\alpha')$ (эти равные числа обозначаются $d(\beta)$, где β — соответствующая раскраска карусели);

• количество раскрасок поезда, получающихся циклическими сдвигами из данной раскраски α поезда (т.е. дающих ту же раскраску карусели), равно $d(\alpha)$.

Итак, $X = \dfrac{1}{6}(a^6 + 2a + 2a^2 + a^3)$.

4. Найдите число (a) раскрасок карусели из n вагончиков в a цветов.

(b) a-цветных ожерелий из n бус. (Ожерелья считаются одинаковыми, если они совмещаются либо поворотом вокруг центра ожерелья, либо осевой симметрией ожерелья.)

5. Сколькими способами можно раскрасить незанумерованные грани куба в a цветов? Раскраски, совмещающиеся вращением пространства (т.е. движением пространства, сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми.

Указание: если не получается, читайте дальше.

6. Назовем *замороженной раскраской* раскраску занумерованых граней куба. (Тогда всего имеется a^6 замороженных раскрасок.)

(a) Перечислите все вращения куба (т.е. вращения пространства, переводящие куб в себя).

(b) Как по вращению s куба найти количество $fix(s)$ замороженных раскрасок, переходящих в себя при вращении s?

(c) Найдите число P пар (α, s), в которых

• s — вращение куба и

• α — замороженная раскраска, переходящая в себя при вращении s.

7. Обозначим через $\operatorname{st}\alpha$ число вращений s куба, переводящих в себя замороженную раскраску α;

(a) $P = \sum\limits_{\text{замороженным раскраскам } \alpha} \operatorname{st}\alpha$.

(b) Для замороженных раскрасок α и α', переходящих друг в друга при некоторых вращениях, $\operatorname{st}\alpha = \operatorname{st}\alpha'$ (эти равные числа обозначаются $\operatorname{st}\beta$, где β — соответствующая незамороженная раскраска, т.е. раскраска незанумерованных граней куба).

(c) $P = \sum\limits_{\text{незамороженным раскраскам } \beta} \operatorname{st}\beta \cdot N_\beta$, где N_β — число замороженных раскрасок, отвечающих незамороженной раскраске β.

(d) Число вращений, переводящих замороженную раскраску α в замороженную раскраску α', равно $\operatorname{st}\alpha$.

(e) $\operatorname{st}\beta \cdot N_\beta = 24$.

3-я серия.

8. (a) Сколькими способами можно раскрасить незанумерованные вершины куба в a цветов? Раскраски, совмещающиеся вращением пространства (т.е. движением пространства, сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми.

(b) Сколькими способами можно раскрасить в a цветов незанумерованные вершины графа $K_{3,3}$? В этом графе 6 вершин, поделенных на 2 группы по 3 вершины. Ребро между двумя вершинами проведено тогда и только тогда, когда эти вершины из разных групп. Раскраски, совмещающиеся изоморфизмом этого графа, считаются одинаковыми.

9. Сформулируйте общую теорему, которую можно было бы применять вместо повторения приведенных решений.

10.* Сколько существует различных (т.е. неизоморфных) неориентированных графов с n незанумерованными вершинами? (Ответ можно оставить в виде суммы.)

11.* Отображения $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (т.е. функции алгебры логики от n переменных) называются *конгруэнтными*, если они становятся равными после переименования переменных.

(a) Найдите число b_n функций алгебры логики от n переменных с точностью до конгруэнтности.

(b) Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} n!b_n/2^{2^n}$ и найдите этот предел.

Зачетные задачи: 1a, 2a, 4ab, 5, 6abc, 7abcde, 8a.

Ответы. 1. (a) 10. (b) 11. (c) $a(a+1)(a+2)(a+3)/24$.
2. $((p-1)!+1)/p$.
3. (a) $(a^5-a)/5$.
8.a. $\frac{a^8+?a^6+?a^4}{24}$.
9. **Лемма Бернсайда.** *Пусть заданы конечное множество M и семейство $\{g_1 = \mathrm{id}\,M, g_2, \dots, g_n\}$ преобразований этого множества, замкнутое относительно композиции и взятия обратного элемента. Назовем элементы множества M эквивалентными, если один можно перевести в другой одним из данных преобразований, где $\mathrm{id}\,M$ – тождественное отображение множества M в себя. Тогда число классов эквивалентности равно $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} fix(g_k)$, где $fix(g_k)$ — число элементов множества M, которые преобразование g_k переводит в себя.*

Литература

[A] В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М, Наука, 1984.

[B] Д. Баранов, А. Клячко, К. Кохась, А. Скопенков и М. Скопенков, Когда любая группа из n элементов циклическая? http://olympiads.mccme.ru/lktg/2011/6/index.htm

[G1] И. Григорьев, Порождение перестановок ‘восьмеркой’, http://www.mccme.ru/mmks/dec10/grigoryev_report.pdf (осторожно, там имеется ошибка!)

[G2] И. Григорьев, Порождение перестановок циклами длины 3, готовится.

[K] Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки, Физматлит, 1985. http://lib.mexmat.ru/books/3692.

[KS] П. Козлов и А. Скопенков, В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач), Мат. Просвещение, 12 (2008), 127–144, http://arxiv.org/abs/0804.4357.

[Z] Математика в задачах. Сборник материалов московских выездных математических школ. Под редакцией А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова. Москва, МЦНМО, 2009. www.mccme.ru/circles/oim/materilals/mvz.pdf.