Занятие 1. Комбинаторная геометрия

А.М. Райгородский

Определение 1. *Хроматическим числом пространства* $\mathbb{R}^n$ *называется минимальное число* $\chi(\mathbb{R}^n)$ *цветов, в которые можно так раскрасить все точки пространства, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1.*

Определение 2. *Диаметром множества* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *называется величина* $\operatorname{diam}\Omega = \sup\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, *где через* $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ *обозначено стандартное евклидово расстояние, а* "$\sup$" *- это "супремум" или точная верхняя грань. Поскольку в дальнейшем речь пойдет о шарах и конечных множествах, можно для простоты представлять себе обычный максимум.*

Определение 3. *Числом Борсука для ограниченного тела* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *называется величина* $f(\Omega)$, *равная минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито* Ω. *Через* $f(n)$ *обозначается* $\max\limits_{\Omega} f(\Omega)$.

ЗАДАЧИ

1. Дано множество точек $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $d = \operatorname{diam}\mathcal{A}$. Докажите, что $|\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) : |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = d\}| \le n$.

2. Выведите из задачи 1, что $f(\mathcal{A}) \le 3$.

3. Пусть B - трехмерный шар. Докажите, что $f(B) \le 4$. Какие диаметры будут у частей? Сделайте то же самое в n - мерном случае с заменой четырех на $n+1$.

4. Чему равно $\chi(\mathbb{R})$?

5. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \ge 4$.

6. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \le 7$.

7. Конечны ли числа $f(n)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$? Если да, то как они оцениваются сверху?

8. Докажите, что $f(n) \ge n+1$, а $\chi(\mathbb{R}^n) \ge n+2$ при $n \ge 2$.

9. Рассмотрим

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + \ldots + x_n = 3\}.$$

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\} \subset V$ таково, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 1$ для любых i и j. Здесь $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = x_i^1 x_j^1 + \ldots + x_i^n x_j^n$ - скалярное произведение векторов $\mathbf{x}_\nu = (x_\nu^1, \ldots, x_\nu^n)$, $\nu \in \{i, j\}$. Докажите как можно лучшую верхнюю оценку на мощность Q.

10*. Рассмотрим

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \ldots + x_n = 5\}.$$

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\} \subset V$ таково, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 2$ для любых i и j. Докажите как можно лучшую верхнюю оценку на мощность Q.

11. Пользуясь результатом задачи 9, докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^2$ с некоторым $c > 0$.

12*. Пользуясь результатом задачи 10, докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^3$ с некоторым $c > 0$.

13*. Как много можно выбрать попарно пересекающихся k - сочетаний из $\{1, \ldots, n\}$?

14*. Пусть множество $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ таково, что $\operatorname{diam} \mathcal{A} = 1$. Существует ли такое $\mathcal{A}$, что при любой раскраске его элементов в три цвета, найдется пара одноцветных элементов на расстоянии 1 и что в то же время никакие три вершины в $\mathcal{A}$ не образуют равносторонних треугольников с длиной стороны 1?