Китайская теорема об остатках. Сравнения степени выше 1.

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2,3,5 и 7 остатки 1,2,4 и 6 соответственно.

2. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

Китайская теорема об остатках. Система сравнений

$$x \equiv a_i (mod\ m_i),\ i = 1, 2, ..., n$$

имеет ровно одно решение по модулю $m_1 m_2 ... m_n$.

3. Пусть $m_1(x), m_2(x), ..., m_n(x)$ - попарно взаимно простыt, а $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$ - произвольные многочлены с целыми коэффициентыми. Докажите, что существует ровно один многочлен $p(x)$ такой, что

$$p(x) \equiv a_i(x)(mod\ m_i(x)),\ i = 1, 2, ..., n$$

и $deg\ p < deg\ m_1 + deg\ m_2 + ... + deg\ m_n$.

4. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (конечно, в каре должно быть более одного человека), но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение. Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата 3 на 3, а если один человек болен, то в виде двух квадратов 2 на 2.

5. Докажите, что существует 2009 идущих подряд чисел, ни одно из которых не является степенью простого числа.

Далее рассматриваются сравнения вида $f(x) \equiv 0(mod\ p)$, где $f(x)$ - многочлен степени n.

6. Докажите, что такое сравнение равносильно сравнению степени не выше $p - 1$.

7. Докажите, что если это сравнение имеет больше, чем n решений, то все коэффициенты $f(x)$ кратны p.

8. Докажите, что выполнение для заданных целого числа a и простого p сравнения $a^{p-1/2} \equiv 1(mod\ p)$ равносильно существованию целого числа x такого, что $x^2 \equiv a(mod\ p)$.

9. Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! \equiv -1(mod\ p)$ при простом p.

10. Докажите, что для любого натурального n $2^{2^n} \equiv 1(mod\ 5^{n-1})$.