

Разные задачи.

Mathematics is the queen of the sciences
and number theory is the queen of Mathematics
Johann Carl Friedrich Gauss

1. Последовательности x_1, x_2, \dots и y_1, y_2, \dots заданы условиями $x_1 = 1/8, y_1 = 1/10, x_{n+1} = x_n + x_n^2, y_{n+1} = y_n + y_n^2$. Докажите, что числа x_m и y_n не равны ни при каких натуральных m и n .

2. Докажите, что для любых различных рациональных чисел a, b, c число

3. $F(x) = x^{2008} - x^{1004} + 1$. Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$, что $F(a_i)F(a_j)$ делится на $a_i a_j$ при всех $i \neq j$?

4. Решите в натуральных числах уравнение

$$k^m + m^n = k^n + 1.$$

5. $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ - последовательность натуральных чисел такая, что

$$a_{n+a_n} = 2a_n$$

при любом натуральном n . Докажите, что найдётся такое натуральное число c , что $a_n = n + c$.

6. a и b - различные натуральные числа такие, что $a^2 + b$ делится на $b^2 + a$ и $b^2 + a$ - степень простого числа. Найдите эти числа.

7. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство:

$$[m, n] + [m + 1, n + 1] > \frac{2mn}{\sqrt{n - m}},$$

где $[x, y]$ - наименьшее общее кратное чисел x и y .

8. Даны попарно взаимно простые натуральные числа x, y, z, t такие, что $xy + yz + zt = xt$. Докажите, что сумма квадратов каких-то двух из этих чисел вдвое больше суммы квадратов двух оставшихся.