## Сравнения. Малая теорема Ферма

Мы будем рассматривать целые числа в связи с остатками от деления их на данное положительное $m$, которое назовём *модулем*.

Каждому целому числу отвечает определённый остаток от деления егона $m$; если двум целым $a$ и $b$ отвечает один и тот же остаток $r$, то они называются *сравнимыми* по модулю $m$

Сравнимость чисел $a$ и $b$ по модулю $m$ записывается так:

$$a \equiv b (mod\ m),$$

что читается: $a$ сравнимо с $b$ по модулю $m$.

1. Сравнимость чисел по модулю $m$ эквивалентна:

а) Возможности представить $a$ в виде $a = b + mt$, где $t$ - целое;

б) Делимости $a - b$ на $m$.

2. Найдите последнюю цифру числа $2^{100}$.

3. Для каких чисел $a$ решением сравнения $ax \equiv 1 (mod\ m)$ будет само число $a$?

4. Пусть в прямоугольном треугольнике длины сторон выражаются целыми числами. Докажите, что длина одного из катетов кратна 3, и длина одной из трёх сторон делится на 5.

**Малая теорема Ферма.** При простом $p$ и $a$, не делящемся на $p$, выполняется сравнение:

$$a^{p-1} \equiv 1 (mod\ p).$$

5. $p$ и $q$ - различные простые числа. Докажите, что

$$p^q + q^p \equiv p + q (mod\ pq).$$

6. Докажите, что при любом нечётном простом $p$ число $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.

7. Сумма трёх чисел $a, b$ и $c$ делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.

8. Докажите, что если число $x^2 + 1$ делится на простое $p$, то $p \equiv 1 (mod\ 4)$.

9. Докажите, что если $k$ - наименьшее натуральное число такое, что $a^k \equiv 1 (mod\ p)$, то $p - 1$ делится на $k$.