

## Подсчеты в графах.

Д.Пермяков

Часть задач взята из окружных и всероссийских олимпиад разных лет.

1. На вечеринку пришли 10 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, ..., 9 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?
2. В круговом турнире участвовало 2009 команд и не было ничьих. Найдите максимальное возможное количество троек команд, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, а третья у первой.
3. В каждой из трех школ учится по  $n$  человек. Любой ученик имеет в сумме ровно  $n+1$  знакомых учеников из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы все трое выбранных учеников были знакомы друг с другом.
4. В графе для любых двух смежных вершин есть две вершины, смежные с ними обеими. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?
5. Геракл дерется со стошеей Гидрой. Каждым ударом он рубит голову Гидры. При этом все шеи, растущие из этой головы пропадают, но вырастают шеи к тем головам, к которым шей до удара не было. Гидра погибает, когда перестает быть единым целым. За какое минимальное количество ударов Геракл может гарантированно победить Гидру?
6. В графе 2007 вершин и степень каждой вершины является степенью двойки. Володя посчитал для каждой вершины количество выходящих из нее путей, проходящих не более чем по двум ребрам, а затем просуммировал полученные результаты по всем вершинам. У него получилось 100000. Докажите, что Володя ошибся.
7. На предприятии трудятся 50000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущие дни приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по предприятию не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.