

Ориентированные графы.

Д.Пермяков

Ориентированный граф (или *орграф*) – граф, каждое ребро которого является стрелкой. Пути и циклы в ориентированном графе определяются также, как в обычном, но идти разрешается только вдоль стрелок.

1. Маленький Принц рассказывает, что он побывал на астероиде, на котором в каждое озеро впадает по 3 реки, и из каждого вытекает по 4 реки. Докажите, что он невнимательно осмотрел астероид.

2. В секретной службе работают n агентов - 001, 002, ..., 007, ..., n . Первый агент следит за тем, кто следит за вторым, второй - за тем, кто следит за третьим, и т.д., n -ый - за тем, кто следит за первым. Докажите, что n - нечетное число.

3. В ориентированном графе из каждой вершины можно выйти хотя бы по d ребрам. Докажите, что найдется простой путь длины $d + 1$.

4. В ориентированном графе из каждой вершины выходит ровно d ребер и входит ровно d ребер. Известно, что если разрешить идти по ребрам в любом направлении, то от любой вершины можно дойти до любой другой (т.е. орграф *слабосвязный*). Докажите, что

(а) орграф *сильносвязный* (см. определение ниже);

(б) найдется цикл, проходящий по всем ребрам ровно по одному разу.

Орграф *сильно связный*, если в нем от любой вершины можно дойти до любой другой.

Турнир – орграф, любые две вершины которого соединены ровно одной стрелкой.

5. Докажите, что любые два турнира без циклов с одинаковым числом вершин изоморфны.

6. Докажите, что в каждом турнире найдется простой путь, проходящий по всем вершинам.

7. Докажите, что турнир *сильносвязен* тогда и только тогда, когда в нем есть простой цикл, проходящий по всем вершинам.

8. Докажите, что вершины турнира можно разбить на множества M_1, \dots, M_k , что

(1) если вершины P и Q принадлежат одному множеству M_i , то существует путь из P в Q по вершинам из M_i ;

(2) если P из M_i , а Q из M_j , где $i < j$, то ребро ведет из P в Q .

9. *Мост* – ребро, после удаления которого граф перестает быть связным. Докажите, что связный граф без мостов имеет *сильно связную ориентацию*.

10. В стране Ориентация на всех дорогах введено одностороннее движение, причем из любого города в любой другой можно добраться, проехав не более, чем по двум дорогам. Одну дорогу закрыли на ремонт так, что из каждого города по-прежнему можно добраться до каждого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать, проехав не более, чем по трем дорогам.