

## Линейность

**Задача 1.** В стаде коров каждая корова весит (а) натуральное; (б) рациональное; (с) действительное число килограммов. Известно, что если из стада увести любую корову, остальных коров можно разбить на два стада равного размера и равной массы. Докажите, что все коровы весят поровну.

**Задача 2.** (а) По кругу написано несколько чисел. Известно, что каждое из них равно полусумме своих соседей. Докажите, что все числа равны.

(б) В каждой из клеток доски  $m \times n$  написано число. При этом в крайних клетках написаны нули, а для каждой из внутренних клеток написанное в ней число равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все числа равны нулю.

(с) В каждой из крайних клеток доски  $m \times n$  написано число. Докажите, что можно так расставить числа в остальных клетках таблицы, что для каждой из внутренних клеток написанное в ней число будет равно среднему арифметическому своих соседей.

(d) Сформулируйте и докажите обобщение предыдущего утверждения на случай произвольного связного графа.

**Задача 3.** На отрезке  $[0; 1]$  отмечено несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

**Задача 4.** Прямоугольник разрезан на прямоугольники так, что у каждого из них одна из сторон равна 1. Докажите, что у исходного прямоугольника одна из сторон целая.

**Задача 5.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AI_a$  и  $BI_b$ . Докажите, что для любой точки  $M$  на отрезке  $I_aI_b$  сумма расстояний до сторон  $AC$  и  $BC$  равна сумме расстоянию до прямой  $AB$ .

**Задача 6.** На каждой из сторон треугольника  $ABC$  выбрано по точке так, что медианы получившегося треугольника параллельны сторонам исходного. Найдите отношения, в которых выбранные точки делят стороны.