И вновь продолжается бой!

Группа Кокстера 13.04.09

Повторение — мать учения.

1. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Через точки A и C проведена окружность, касающаяся AO и CO. Докажите, что вторые точки пересечения прямых BA и BC с этой окружностью являются концами ее диаметра.

2. Через точку S, лежащую вне окружности с центром O, проведены две касательные, касающиеся окружности в точках A и B, и секущая, пересекающая окружность в точках M и N. Прямые AB и SO пересекаются в точке K. Докажите, что точки M, N, K и O лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC. Окружность ω_1 с центром на отрезке AB проходит через точку A и вторично пересекает отрезки AB и AC в точках A_1 и A_2 соответственно. Окружность ω_2 с центром на отрезке BC проходит через C и вторично пересекает отрезки BC и AC в точках C_1 и C_2 соответственно. Известно, что окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке K внешним образом. Докажите, что $\angle A_1KC_1 = \angle A_2KC_2$.

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть M и N — точки пересечения окружностей, одна из которых проходит через точки A и B, а другая — через точки C и D. Найдите геометрическое место точек N, если точка M лежит на отрезке OC и не совпадает с его концами.

5. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что точка O, а также основания перпендекуляров, опущенных из точки A на прямые BC, BD и CD, лежат на одной окружности.

6. Окружность ω проходит через вершины B, C и центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Второй раз ω пересекает прямую AB в точке B_1, а AC — в точке C_1. Докажите, что длины отрезков BB_1 и CC_1 равны.

7. В треугольнике ABC с острым углом при вершине A проведены биссектриса AE и высота BH. Известно, что $\angle AEB = 45^o$. Найдите угол EHC.

8. Внутри острого угла XAY взята точка D, а на его сторонах — точки B и C так, что $\angle ABC = \angle XBD$ и $\angle ACB = \angle YCD$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на отрезке AD.

9. Окружности S_1 и S_2 центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность S_2 в точке N, луч O_2A пересекает окружность S_1 в точке M, а прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F. Докажите, что $AE = AF$.

10. Центры четырех окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 лежат на окружности S. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, S_2 и S_3 — в точках A_2 и B_2, S_3 и S_4 — в точках A_3 и B_3, S_4 и S_1 — в точках A_4 и B_4, причем точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на окружности S, а точки B_1, B_2, B_3 и B_4 различны и лежат внутри S. Докажите, что $B_1B_2B_3B_4$ — прямоугольник.

11. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Докажите, что прямая O_1O_2 отсекает от треугольника AEB равнобедренный треугольник.

12. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях: стороны AC за точку C, CB за B, BA за точку A взяты соответственно точки B_1, A_1, C_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC.