Еще задачи.

Группа Кокстера 15.04.09

Тяжело в учении — легко в бою.

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 — середины дуг BAC, CBA, ACB описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружностьв точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содер- жащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

3. ПустьA' — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Прямая a проходит через точку A' и параллельна биссектрисе внутреннего угла A. Аналогично строятся прямые b и c. Докажите, что a, b и c пересекаются в одной точке.

4. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD, окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K и L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

5. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC, CD в точках K, L, M, N соответственно. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — соответственно окружности, вписанные в треугольники AKL, BLM, CMN, DNK. К окружностям S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 проведены общие внешние касательные, отличные от сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя касательными, — ромб.

6. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM, проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке.

7. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причем вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырехугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C — в точке L', внешних углов C и D — в точке M', внешних углов D и A — в точке N'. Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку.

8. Дан выпуклый многоугольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удаленной от прямой, содержащей эту сторону. Докажите, что сумма всех таких углов равна 180^o

9. Дан выпуклый n-угольник ($n > 3$), никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Окружность, проходящую через три вершины многоугольника и содержащую внутри себя остальные его вершины, назовем описанной. Описанную окружностьназовем граничной, если она проходит через три последовательные (соседние) вершины многоугольника; описанную окружность назовем внутренней, если она проходит через три вершины, никакие две из которых не являются соседними вершинами многоугольника. Докажите, что граничных описанных окружностей на две больше, чем внутренних.

10. Проведем через основание биссектрисы угла A разностороннего треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку ее касания с окружностью обозначим через K_a. Аналогично построим точки K_b и K_c. Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_a, K_b и K_c с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, имеют общую точку, причем эта точка лежит на вписанной окружности.

11. Докажите, что если у выпуклого многоугольника все углы равны, то по крайней мере у двух его сторон длины не превосходят длин соседних с ними сторон.