Кодирование

1. Некто задумал число x от 1 до 1000. Ему можно послать список из некоторого количества вопросов, допускающих ответ «да» и «нет». Какое минимальное число вопросов должно быть в списке, чтобы по ответам можно было восстановить задуманное число? Можно ли обойтись меньшим числом вопросов?

2. Та же задача, но на один из вопросов разрешается не отвечать (то есть вместо «да» или «нет» дать ответ «не скажу».

3. Та же задача, только на один из вопросов разрешается дать неверный ответ (естественно, не говоря, на какой; разрешается также дать и все верные ответы).

Булевым кубом размерности n называется множество $\mathbb{B}^n$ всех последовательностей из n нулей и единиц. Этих последовательностей 2^n, они называются *вершинами* булева куба. *Расстояние Хемминга* между двумя вершинами булева куба определяется как число позиций, в которых соответствующие последовательности различаются.

4. Выполнено ли для расстояния Хемминга $d(x, y)$ неравенство треугольника $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$?

5. Расстояние Хемминга между двумя вершинами равно 10. Всегда ли можно найти третью вершину, которая отстоит от этих двух на расстояние 5?

6. Известно, что $d(x, y) = 4$ и $d(y, z) = 7$. Укажите все возможные значения $d(x, z)$.

7. Сколько вершин булева куба размерности n находится на расстоянии 1 данной вершины? на расстоянии 2? на расстоянии k?

8. Найти минимальную размерность булева куба, в котором можно разместить 1000 вершин с попарными расстояниями не менее 2.

9. Как связаны задачи 2 и 8?

10. Как переформулировать задачу 3 в терминах расстояния Хемминга в булевом кубе?

11. В булевом кубе $\mathbb{B}^n$ выбраны вершины, расстояния между которыми не меньше 3. Докажите, что выбрано не более $2^n/(n + 1)$ вершин.

12. Докажите, что в задаче 3 недостаточно 13 вопросов.

13. Докажите, что достаточно 14 вопросов.

14. Постарайтесь получить возможно более близкие верхние и нижние оценки для числа вопросов, если требуется отгадать число от 1 до 1000 и задумавший имеет право дать неверный ответ не более чем на 2 вопроса.

15. Шаром радиуса k называется множество всех вершин, отстоящих от данной на расстояние не более k. При каких n булев куб можно покрыть полностью и без перекрытий шарами радиуса 1?

16. Имеется несколько последовательностей нулей и единиц длины n, и любые две их них отличаются в 90% или более мест. Сколько таких последовательностей может быть?

17. Тот же вопрос, если любые две последовательности отличаются в 60% или более мест: докажите, что таких последовательностей не более 100.

18. Имеется несколько последовательностей нулей и единиц длины n, и любые две из них отличаются более чем в половине мест. Докажите, что их не более $n + 1$ штук.