Клеточные автоматы

Белые и чёрные клетки

На клетчатой бумаге некоторые клетки — белые, остальные — чёрные. На каждом шаге все клетки одновременно перекрашиваются в цвет большинства из пяти клеток: сама клетка и четыре соседа.

1. Может ли за один шаг количество чёрных клеток (изначально конечное):

(а) увеличиться;

(б) увеличиться в полтора или более раза?

(в) увеличиться в два или более раза?

2. Может ли за несколько шагов количество чёрных клетов (изначально конечное):

(а) стать бесконечным;

(б) увеличиться больше чем в четыре раза?

(в) увеличиться больше чем в два раза?

(г) увеличиться больше чем в полтора раза?

3. Изменим правило: пусть теперь клетка приобретает цвет большинства из трёх клеток — она сама, сосед справа и сосед сверху.

(а) Докажите, что любое конечная конфигурация из чёрных клеток рано или поздно вымрет (все клетки станут белыми).

(б) Докажите, что любое конечная конфигурация из n чёрных клеток вымрет через $10n$ шагов (все клетки станут белыми).

(в) Докажите, что любое конечная конфигурация из n чёрных клеток вымрет через n шагов.

(г) Изначально все клетки белые. На каждом шаге клетки преобразуются по описанному правилу с исключениями: противник может дополнительно сделать одну или несколько клеток чёрными (на этом шаге). Докажите, что если противник воспользовался своим правом (в общей сложности) для k клеток, то число шагов, на которых были чёрные клетки, не превосходит k.

4. Верно ли утверждение о вымирании любой конечной конфигурации для автомата, в котором большинство берётся среди

(а) самой клетки, соседа сверху и соседа снизу?

(б) соседа снизу-слева, соседа снизу-справа и соседа сверху-справа?

Программирование клеточных автоматов

Каждая из клеток (в бесконечной цепочке одинаковых клеток, «ленте») в каждый момент находится в одном из конечного числа *состояний*. В каждый момент времени $(0, 1, 2, \ldots)$ все клетки одновременно меняют своё состояние. Новое состояние определяется тремя старыми: состоянием самой клетки и двух её соседей. Формально говоря, автомат задаётся парой: *множеством состояний* Q и *функцией перехода* $\tau : Q \times Q \times Q \to Q$. *Конфигурация* автомата — бесконечная в обе стороны последовательность состояний клеток $\ldots q_{-2}q_{-1}q_0q_1q_2\ldots$, то есть элемент $Q^{\mathbb{Z}}$. Она преобразуется на каждом шаге по правилу τ (в каждом месте): из конфигурации $\ldots a_i \ldots$ получается конфигурация $\ldots b_i \ldots$, в которой $b_i = \tau(a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$.

5. Будем считать, что среди состояний автомата есть 0 и 1. Постройте автомат с таким свойством: если в начальной конфигурации была хоть одна единица, то со временем вся лента заполнится единицами (любая клетка начиная с некоторого момента содержит единицу); если же единиц в начальной конфигурации не было, то они и не появятся.

6. (Проверка чётности в унарной системе.) Постройте клеточный автомат с таким свойством: если вначале было $\ldots 0001^k000\ldots$ с чётным $k > 0$, то лента заполнится буквами Y, а если с нечётным k, то она заполнится буквами N. (Среди состояний есть 0, 1, Y, N, могут быть и другие, если нужно.)

7. (Проверка конечности.) На ленте вначале записаны нули и единицы. Постройте конечный автомат со следующим свойством:

(а) на ленте появляется буква Y, если вначале было конечное число единиц, и не появляется в противном случае;

(б) на ленте появляется буква Y, если вначале было бесконечное число единиц, и не появляется в противном случае.

8. (Проверка симметрии.) Вначале имеется слово из нулей и единиц, окружённое символами # (до бесконечности). Постройте клеточный автомат, проверяющий симметричность этого слова (свойство палиндрома): ответом должна быть буква Y или N.

9. (Время жизни автомата.) Будем считать, что состояние 0 нейтрально (нули, окружённые нулями, остаются нулями). Начнём с n единиц, окружённых нулями, и посмотрим, через какое время останутся одни нули (если это произойдёт; если нет — время жизни считаем бесконечным).

(а) Может ли время жизни быть равно n?

(б) быть 2^n или больше (но конечным)?

(в) быть 2^{2^n} или больше (но конечным)?

(г) те же вопросы, если дополнительно требуется, чтобы нулевые клетки всегда оставались нулевыми.

Общие свойства

Каждый автомат задаёт отображения множества всех конфигураций (двусторонних последовательностей состояний) в себя. Он называется *инъективным*, если разные конфигурации переходят в разные, и *сюръективным*, если всякая конфигурация имеет прообраз.

10. Докажите, что если любое конечное подслово может появиться в конфигурации (после применения автомата), то он сюръективен.

11. Докажите, что если автомат инъективен и сюръективен (то есть каждая конфигурация имеет ровно один прообраз), то и обратное отображение задаётся конечным автоматом, в котором новое состояние клетки зависит от состояний фиксированного конечного числа соседей (не обязательно двух).

12. Докажите, что если автомат инъективен, то он обязательно и сюръективен.

13. Придумайте способ (алгоритм) проверки инъективности автомата по его функции перехода.

14. Тот же вопрос для сюръективности.