Мосгор-11

15.04.09

1. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$sinx + a = bx, cosx = b$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

2. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 100. Если все ее члены увеличить на 1 или все ее члены увеличить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 100. Какие значения при этих условиях может принимать величина n^2d, где d—разность прогрессии, а n—число ее членов?

3. Доска размером 2005×2005 разделена на квадратные клетки со стороной единица. Некоторые клетки доски в каком-то порядке занумерованы числами $1, 2, \dots$ так, что на расстоянии, меньшем 10, от любой незанумерованной клетки найдется занумерованная клетка. Докажите, что найдутся две клетки на расстоянии, меньшем 150, которые занумерованы числами, различающимися более, чем на 23. Расстояние между клетками — это расстояние между их центрами.

4. С выпуклым четырехугольником $ABCD$ проделывают следующую операцию: одну из данных вершин меняют на точку, симметричную этой вершине относительно серединного перпендикуляра к диагонали (концом которой она не является), обозначив новую точку прежней буквой. Эту операцию последовательно применяют к вершинам A, B, C, D, A, B, $\dots$ — всего n раз. Назовем четырехугольник допустимым, если его стороны попарно различны и после применения любого числа операций он остается выпуклым. Существует ли:

   а) допустимый четырехугольник, который после $n < 5$ операций становится равным исходному;

   б) такое число n_0, что любой допустимый четырехугольник после $n = n_0$ операций становится равным исходному?

5. К некоторому натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трех исходных чисел. Найдите все возможные тройки исходных чисел.

6. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Миша мысленно выбирает n точек, а Коля пытается их разгадать. За одну попытку Коля указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Миша сообщает Коле расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Коля умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Коля наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за $(n + 1)^2$ попыток?