Мосгор-9

15.04.09

1. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня.

2. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А или Б (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ‘ ходом). После того, как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O, B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O, C, касается прямой CD.

4. Найдите все такие целые положительные k, что число $1\ldots12\ldots2-2\ldots2$ (В первом числе 2000 цифр k двоек, во втором — 1001 двойка) является квадратом целого числа.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC ($AB > BC$) в точках P и Q соответственно, RS — средняя линия, параллельная AB, T — точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите , что T лежит на биссектрисе угла B треугольника.

6. В соревнованиях по n-борью участвуют $2n$ человек. Для каждого спортсмена известна его сила в каждом из видов программы. Соревнования проходят следующим образом: сначала все спортсмены участвуют в первом виде программы, и лучшая половина из них выходит в следующий круг. Эта половина принимает участие в следующем виде, и половина из них выходит в следующий круг, и т. д., пока в n-м виде программы не будет определен победитель. Назовем спортсмена "возможным победителем", если можно так расставить виды спорта в программе, что он станет победителем.

   а) докажите, что может так случиться, что хотя бы половина спортсменов является «возможными победителями»;

   б) докажите, что всегда число «возможных победителей» не превосходит $2^n - n$;

   в) докажите, что может так случиться, что "возможных победителей"ровно $2^n - n$.