Бесподобные задачи.

Группа Кокстера 14.04.09

1. Каждую вершину трапеции отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Докажите, что если получившиеся точки образуют четырехугольник, то он также является трапецией.

2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Медиана AM пересекает высоту CH и отрезок BD в точках N и K соответственно. Докажите, что если $AK = BK$, то $AN = 2KM$.

3. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

4. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность s_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (s_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность s_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (s_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей s_1 и s_2, будут параллельны между собой.

5. В треугольнике ABC взята точка O такая, что

$$\angle COA = \angle B + 60^o, \angle COB = \angle A + 60^o, \angle BOA = \angle C + 60^o.$$

   Докажите, что если из отрезков AO, BO, CO можно составить треугольник, то из высот треугольника ABC тоже можно составить треугольник и эти треугольники подобны.

6. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I –– центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N – середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. В точке A к ω_1 и ω_2 проведены соответственно касательные l_1 и l_2. Точки T_1 и T_2 выбраны соответственно на окружностях ω_1 и ω_2 так, что угловые меры дуг T_1A и AT_2 равны. Касательная t_1 в точке T_1 к окружности ω_1 пересекает l_2 в точке M_1. Аналогично, касательная t_2 в точке T_2 к окружности ω_2 пересекает l_1 в точке M_2. Докажите, что середины отрезков M_1M_2 находятся на одной прямой, не зависящей от положения точек T_1, T_2.

8. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC, и прямая l касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой l.

9. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его стороны в точках A_1 и C_1, а описанную окружность этого треугольника – в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые A_1C_1 и A_0C_0 пересекаются в точке P. Докажите, что отрезок, соединяющий P с центром вписанной окружности треугольника ABC, параллелен AC.