Асимптотика

Н. Гончарук, группа Lie

Задача 1. Упорядочьте следующие функции по возрастанию при очень больших значениях x:

(a) x; (b) $0{,}01x^2$; (c) $x^{2{,}00001}$; (d) $1{,}0001^x$.

Задача 2. Из бесконечной клетчатой плоскости вырезали все клетки, обе координаты которых делятся на 10. Докажите, что оставшуюся доску нельзя обойти ходом коня.

Задача 3. (a) Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в узлах целочисленной решётки равна

$$S = N_f + \frac{1}{2}N_e + \frac{1}{4}N_v,$$

где N_f — количество узлов решётки внутри параллелограмма, N_e — на его сторонах, но не в вершинах, а N_v — количество вершин.

(b) Докажите, что объём параллелипипеда с вершинами в узлах целочисленной решётки равен

$$S = N_i + \frac{1}{2}N_f + \frac{1}{4}N_e + \frac{1}{8}N_v,$$

где N_i — количество узлов решётки внутри параллелипипеда, N_f — на внутренностях его граней, N_e — на внутренностях его рёбер, а N_v — количество вершин.

(c) Верна ли аналогичная формула для произвольного многогранника в пространстве?

Задача 4. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, такие что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n+1)$-й степенью.

Задача 5. (a) Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точной четвёртой степенью. Докажите, что $a = b = 0$.

(b) Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точным квадратом. Докажите, что $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$ для некоторых целых d и e.

Задача 6 (Теорема Минковского)**.** (a) Докажите, что в любом множестве на плоскости площади больше 1 найдутся две точки A и B, для которых вектор AB — целочисленный.

(b) Докажите, что любое выпуклое центрально–симметричное относительно нуля множество на плоскости площади больше 4 содержит ненулевую целую точку.