Лемма Кронекера

Письменно — задача 4 для $n = 2$

1. По круглому стадиону (длина кольца 1 стадий) прыгает Кентавр, сдвигаясь все время на дугу длины α.

а) Докажите, что Кентавр подойдет сколь угодно близко к начальной точке.

б) Докажите, что если $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то множество положений Кентавра всюду плотно.

2. По круглому стадиону прыгают n кентавров, длина прыжка i-того — α_i, выпрыгивают они в нулевой момент времени из одной точки. Докажите, что будут моменты времени, когда они одновременно будут находиться на расстоянии $< \frac{1}{2009}$ от начальной точки (решите задачу сначала для $n = 2$).

3. Пусть $F(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ — произвольная функция, возрастающая с убыванием ε. Докажите, что существует такое $\alpha \notin \mathbb{Q}$, что для Кентавра с длиной прыжка α для сколь угодно малого ε будет существовать дуга длины $\delta < \varepsilon$, которую он не сможет посетить менее чем за $N(\delta)$ прыжков.

4. По круглому стадиону прыгают n кентавров, длина прыжка i-того — α_i, при этом $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Доказать, что тогда множество положений набора из n кентавров всюду плотно.

5. Докажите, что 2^n может начинаться с любой комбинации цифр.

6. Дано слово W, составленное из первых цифр степеней двойки: $1248136125\ldots$, u — его подслово, u^* — результат записывания u в обратном порядке. Докажите, что u^* есть подслово последовательности первых цифр степеней пятерки.

7. Сколько подслов длины 13 в слове W?

8. Докажите, что слово W непериодично.

9. Докажите, что W — *равномерно рекуррентно*, т.е. любое подслово u встречается в любом куске длины $n(u)$ для некоторой функции n.