Всерос-10

15.04.09

1. На столе стоят три пустых банки из-под меда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик — только во вторую или третью, а Пятачок — в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 1999 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни-Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл.

2. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ..., для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{GCD(a_{n-1}, a_{n-2})}.$$

3. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM, проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке.

4. В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее, чем через $[\frac{n^2}{3}]$ ходов.