Идея пространства состояний. Coxeter-17-2. А. Я. Канель

Задача. (Н.Н.Константинов, “Возы”) Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины $2l$, смогли проехать не порвав веревки. Могут ли разминуться не коснувшись два круглых воза радиуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Решение. Требуется показать, что некоторое положение займут и возы и автомобили. Движение возов и автомобилей может быть достаточно сложным, и проследить явно за всеми возникающими ситуациями не удается. Ключевая идея: рассмотреть их все сразу, изобразить как один объект.

Положение двух экипажей изобразим точками единичного квадрата $K : 0 \leq x, y \leq 1$ следующим образом: пусть x – это доля расстояния от A до B по первой дороге, заключенная между A и находящимся на этой дороге экипажем. Аналогичным образом координата y связывается со второй дорогой. Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата K. Этот квадрат называется фазовым пространством, а его точки - фазовыми точками. Каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве. Например, начальные положения машин (в городе A) соответствует левому нижнему углу квадрата, а движение машин из A в B изображается кривой, ведущей в противоположный угол C. Точно так же начальное положение возов соответствует углу D, а движение изображается кривой, ведущей в угол B. Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому как бы ни двигались возы и экипажи, наступит момент, когда пара возов займет сстяние, в котором когда-то находилась пара экипажей и расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Таким образом, разминуться не удастся. Итак “описание состояний процесса как точек фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.” Решая задачу, мы мысленно находимся в некоторой ситуации. Идея фазового пространства состоит в том, чтобы “оторваться от земли” и посмотреть на все ситуации вместе как на единое целое. Особенно полезен этот подход, когда рассматривается много ситуаций и от одной переходят к другой. Именно этот случай нам и встречался при изучении цикличности. Этот подход также бывает полезен, когда есть взаимодействие между ситуациями или выбор нужного объекта.

3. Монах с 6 утра до 6 вечера поднимался на гору и там ночевал. На следующий день с 6 утра до 2 дня он спускался по той же дороге. Докажите, что в пути было такое место, где он находился в одно и то же время и на подъеме и на спуске (монах часто отдыхал и шел неравномерно).

4. Двое решили стреляться на дуэли в Гайд-парке между 0 и 1 часом ночи. Каждый из противников приходит на место встречи. Если соперника нет, он ждет 10 минут и уходит. Какова вероятность того, что дуэль состоится?

Похожим образом в теории информации рассматривается пространство вариантов. Вот типичный пример. Из 10 монет одна более тяжелая - фальшивая. Докажите, что на чашечных весах без гирь ее нельзя определить наверняка двумя взвешиваниями.

Другой хорошо известный сюжет олимпиадного фольклора - угадывание задуманного числа вопросами, на которые отвечают только “да” или “нет”. Тут тоже целесообразно задавать такие вопросы, чтобы ответам “да” и “нет” соответствовало бы по-возможности одинаковое число оставшихся вариантов.

В теории оптимального управления рассматривают “область достижимости”, т.е. множество ситуаций, достижимых из данного положения.

5. На единичной сфере отмечено несколько дуг, суммарная длина которых меньше π. Доказать, что имеется прямая на сфере, не пересекающаяся ни с одной из них. (Под прямой на сфере понимается большой круг.)

6. На единичной сфере расположена прямая длины большей $\pi \cdot k$. Докажите, что найдется экватор, пересекающий ее не менее чем в k точках.

7. На плоскости расположена фигура единичной площади и 1000 точек. Докажите, что ее можно сдвинуть на вектор меньший $\sqrt{\pi}/1000$ так, чтобы фигура не покрывала ни одну из точек.

8. Вершина A выпуклого девятивершинника переводится сдвигами в каждую из остальных его вершин. Доказать, что хотя бы два из получающихся 8 девятивершинников имеют общую внутреннюю точку.

Ряд задач связан с соотнесением в решетках.

9. Дана фигура площади $> k$. Докажите, что в ней найдется k точек, отличающихся на целочисленные векторы.

10. (а) Дан параллелограмм с вершинами в целых точках, такой что внутри или на границе больше целых точек нет. Докажите, что его площадь равна единице.

(б) В общем случае его площадь равна числу точек внутри + половина от числа точек на ребрах + четверть от числа вершин. Докажите это.

(в) Сформулируйте и обобщите задачу для n-мерного случая.

11. (лемма Минковского) Докажите, что если центрально-симметричная выпуклая фигура на плоскости, площади больше 4 содержит ноль, то она содежит еще хотя бы одну целую точку.

12. На клетчатую бумагу бросили кубик со стороной A. Докажите, что он не может покрыть более,чем $(A+1)^2$ вершин клеток.

13. (Переливания) Даны три сосуда вместимостью $6, 7$, и 12 литров. Два меньших сосуда заполнены. Можно ли в большом сосуде отмерить 9 литров воды?

14. В Москве 7 высотных зданий. Приезжий математик хочет найти точку, из которой они все видны в заданном порядке (считая от МГУ по часовой стрелке). Для любого ли заданного порядка это возможно?

15. На сфере задано n точек общего положения - т.е. никакие три не лежат на одной сферической прямой. Сколькими различными способами можно добавить “хорошую” прямую, (т.е. не проходящую через заданные точки)? Два способа одинаковы, если один можно получить из другого, непрерывно двигая новую прямую так, чтобы она все время оставалась “хорошей”?