# Всерос-11

17.04.09

1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $f(x+y)+f(y+z)+f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$.

2. Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке $a$, $b$, $c$ такой, что $a+99b=c$, нашлись два числа из одного подмножества.

3. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ (пятиугольника, образованного диагоналями) есть хотя бы одна целая точка.

4. Дана последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для любого $k$ от 1 до $n$ обозначим через $m_k$ величину

$$max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1}+a_{k-l+2}+\cdots+a_k}{l}$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число тех $k$, для которых $m_k > \alpha$, меньше, чем $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\alpha}$

---


# Всерос-11

17.04.09

1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $f(x+y)+f(y+z)+f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$.

2. Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке $a$, $b$, $c$ такой, что $a+99b=c$, нашлись два числа из одного подмножества.

3. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ (пятиугольника, образованного диагоналями) есть хотя бы одна целая точка.

4. Дана последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для любого $k$ от 1 до $n$ обозначим через $m_k$ величину

$$max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1}+a_{k-l+2}+\cdots+a_k}{l}$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число тех $k$, для которых $m_k > \alpha$, меньше, чем $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\alpha}$