

## Всерос-10

17.04.09

1. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

2. Пусть  $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$  и

$$x_1^{13} + x_2^{13} + \cdots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Докажите, что если  $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ , то

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \cdots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  биссектриса острого угла между высотами  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Биссектриса угла  $B$  пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника  $ABC$  с серединой стороны  $AC$ , в точке  $R$ . Докажите, что точки  $P$ ,  $B$ ,  $Q$  и  $R$  лежат на одной окружности.
4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них  $A$ ,  $B$  и  $C$  и спросить, верно ли, что  $m(A) < m(B) < m(C)$  (через  $m(x)$  обозначена масса гири  $x$ . При этом дается ответ "ДА" или "НЕТ"). Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь?

## Всерос-10

17.04.09

1. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

2. Пусть  $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$  и

$$x_1^{13} + x_2^{13} + \cdots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Докажите, что если  $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ , то

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \cdots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  биссектриса острого угла между высотами  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Биссектриса угла  $B$  пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника  $ABC$  с серединой стороны  $AC$ , в точке  $R$ . Докажите, что точки  $P$ ,  $B$ ,  $Q$  и  $R$  лежат на одной окружности.
4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них  $A$ ,  $B$  и  $C$  и спросить, верно ли, что  $m(A) < m(B) < m(C)$  (через  $m(x)$  обозначена масса гири  $x$ . При этом дается ответ "ДА" или "НЕТ"). Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь?