Комплексные числа и геометрия — 1 (9–10)

А.А.Заславский

Этот курс посвящен применению комплексных чисел для решения геометрических задач. Он предполагает первичное знакомство с комплексными числами в объеме соответствующего раздела "Миникурса по алгебре"А.Б.Скопенкова. Предполагается также знание определений и основных свойств движений, подобий, аффинных преобразований и инверсии. Необходимые сведения можно получить в "Миникурсе по геометрическим преобразованиям".

Комплексному числу $z = a + bi$ взаимнооднозначно соответствует точка плоскости Z с координатами (a, b), при этом модуль z равен расстоянию от Z до начала координат O, а аргумент ориентированному углу между положительным направлением оси OX и вектором $\vec{OZ}$. Оси OX и OY называют действительной и мнимой осями.

1. Выясните геометрический смысл сложения комплексных чисел.

Зачетные задачи

2.

a)Каким геометрическим преобразованием комплексной плоскости получается число iz из числа z?

b)Обозначим $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Каков геометрический смысл умножения на $e^{i\varphi}$? на $re^{i\varphi}$?

c)Выразите число w, полученное из числа z поворотом на угол φ против часовой стрелки относительно центра z_0 (через z, z_0 и φ).

d)Докажите, что композиция поворотов плоскости (с различными центрами) — поворот или параллельный перенос.

3*. Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

4. Из утверждения предыдущей задачи выведите тригонометрическиие формулы сложения.

5. Выясните геометрический смысл преобразования комплексной плоскости, переводящего точку z в точку

a)$az + b$;

b)$a\bar{z} + b$.

a, b — произвольные комплексные числа, $a \neq 0$.

6. Докажите, что любое преобразование подобия задается одной из формул предыдущей задачи.

7. Докажите, что аффинное преобразование комплексной плоскости переводит каждую точку z в точку $z' = az + b\bar{z} + c$, где a, b, c — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|a| \neq |b|$.

8.

a)Докажите **теорему Наполеона**. Если на сторонах произвольного треугольника построить во внешнюю (внутреннюю) сторону правильные треугольники, то их центры образуют правильный треугольник.

b)(С.Маркелов) На сторонах аффинно-правильного n-угольника построены во внешнюю (внутреннюю) сторону правильные n-угольники. Докажите, что их центры образуют правильный n-угольник.

Комплексные числа и геометрия — 2 (10–11)

А.А.Заславский

Преобразование круговой плоскости, сохраняющее окружности, называется **круговым**. *Произвольное отличое от подобия круговое преобразование может быть представлено как композиция инверсии и движения.*

1.* Докажите, что преобразование комплексной плоскости является круговым тогда и только тогда, когда оно задается дробно-линейной функцией вида $z' = (az+b)/(cz+d)$ или $z' = (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$.

2. Докажите, что для любых шести точек A, B, C, A', B', C' существует ровно два круговых преобразования, переводящих A в A', B в B', C в C'.

Двойным отношением *четырех комплексных чисел a, b, c, d называется комплексное число* $(ab;cd) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$.

3.* Докажите, что для данных восьми точек A, B, C, D; A', B', C', D' круговое преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C', D в D', существует тогда и только тогда когда для соответствующих комплексных чисел $(ab;cd) = (a'b';c'd')$ или $\overline{(ab;cd)} = (a'b';c'd')$.

4. Даны два треугольника — ABC и $A'B'C'$. Докажите, что существует инверсия, переводящая треугольник ABC в треугольник, равный $A'B'C'$.

5. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что существует инверсия, переводящая его вершины в вершины параллелограмма, причем все параллелограммы, полученные в результате таких инверсий подобны.

Дополнительные задачи

6.

a)Пусть a, b, c — комплексные числа, соответствующие точкам A, B, C; $f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$. Докажите, что точки, соответствующие корням $f'(z)$, изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

b*) **Эллипсом Штейнера** треугольника ABC называется эллипс наибольшей площади, лежащий внутри треугольника. Докажите, что фокусы эллипса Штейнера соответствуют корням $f'(z)$.

7.* Пусть a, b, c — комплексные числа, соответствующие точкам A, B, C, причем $|a| = |b| = |c| = 1$. Докажите, что точки Z_1, Z_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC тогда и только тогда, когда соответствующие комплексные числа удовлетворяют соотношению

$$z_1 + z_2 + abc\overline{z_1 z_2} = a + b + c.$$

8.* Как известно, расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей треугольника выражается через радиусы R, r этих окружностей с помощью **формулы Эйлера**: $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Докажите обобщение этой формулы: если в треугольник вписан эллипс с фокусами F_1, F_2 и малой осью l, то

$$R^2 l^2 = (R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2).$$

9.* (А.Акопян) Дан треугольник ABC и точка P. Найдите ГМТ, изогонально сопряженных P относительно всех треугольников, имеющих те же описанную и вписанную окружности, что и ABC.