

## Олимпиада

Группа МОНСТРА 18.04.09

1. Четыре натуральных числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них делится на произведение двух оставшихся. Докажите, что по крайней мере три из этих чисел равны между собой.
  2. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т. е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по ее разные стороны).
  3. Через вершину  $A$  тетраэдра  $ABCD$  проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней  $ABC$ ,  $ACD$  и  $ABD$  образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда  $AB * CD = AC * BD = AD * BC$ .
  4. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя — либо два, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?
- 

## Олимпиада

Группа МОНСТРА 18.04.09

1. Четыре натуральных числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них делится на произведение двух оставшихся. Докажите, что по крайней мере три из этих чисел равны между собой.
2. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т. е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по ее разные стороны).
3. Через вершину  $A$  тетраэдра  $ABCD$  проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней  $ABC$ ,  $ACD$  и  $ABD$  образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда  $AB * CD = AC * BD = AD * BC$ .
4. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя — либо два, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?