Теорема Виета для Монстров.

Письменно - задача 5.

Аддитивное представление многочлена — представление в виде $P = a_0x^n + \dots + a_n$; *мультипликативное* — в виде $P = a_0(x - x_1)\dots(x - x_n)$, где x_i — его корни. $Q|P$ (*Q делит P*), если корни Q являются корнями P, и кратности соответствующих корней у P не меньше.

1. а) Докажите, что $P(x) - x$ делит $P(P(x)) - x$.

   б) $P^{(k)}(x) = P(P(\dots(P(x))\dots))$ (k раз). Докажите, что если k делит l, то $P^{(k)}(x) - x$ делит $P^{(l)}(x) - x$.

2. Пусть выполняется неравенство $k + l \leqslant n$. Докажите, что $(x - 1)(x^2 - 1)\cdots(x^n - 1)$ делится на $(x - 1)\cdots(x^k - 1)(x - 1)\cdots(x^l - 1)$.

3. а) Докажите, что $P(P(x) + x)$ делится на $P(x)$

   б) $P(x)$ — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Доказать, что найдется такое целое x,что все простые делители $P(x)$ строго меньше x.

   Логарифмической производной P называется величина $\frac{1}{x-x_1} + \dots + \frac{1}{x-x_n}$, она равна $\frac{P'}{P}$, при этом $\frac{(P_1P_2)'}{P_1P_2} = \frac{P_1'}{P_1} + \frac{P_2'}{P_2}$.

4. Докажите, что все корни производной многочлена лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена (теорема Гаусса).

5. $x_1, \dots, x_n > 0$, $M_k = \left(\sum\limits_{i_1<\dots<i_k} \frac{x_{i_1}\cdots x_{i_k}}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}$. Докажите, что $M_1 \geqslant \dots \geqslant M_n$ (неравенство Маклорена).

6. $c > 0$, $P(x)$ — многочлен n-й степени с корнями $x_1 < \dots < x_n$. Докажите, что множество решений неравенства $\frac{P'(x)}{P(x)} > c$ имеет длину $\frac{n}{c}$.

7. Разложить на множители

   а) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

   б) $yz(y - z) + zx(z - x) + xy(x - y)$.

8. а) $x_1 < x_2 < x_3, \quad y_1 < y_2 < y_3, \quad x_1 < y_1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Докажите, что $x_3 < y_3$.

   б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для 2009 чисел.

9*. Докажите, что для любого n при некоторых x все простые делители $x^n - 1$ меньше x (см. задачу 3б).