

Аналитические задачи на многочлены (10–11). А. Скопенков.¹

Если не оговорено противное, то под *многочленом* понимается многочлен с вещественными коэффициентами, и латинские буквы обозначают вещественные числа.

1-я серия.

1. *Правило знаков Декарта.* Число положительных решений уравнения $p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0 = 0$ не превосходит числа перемен знака в последовательности p_0, \dots, p_n , из которой вычеркнуты нули.

Переменной знака в конечной последовательности b_0, \dots, b_k ненулевых чисел называется такой индекс $s \in \{1, \dots, k\}$, что числа b_{s-1} и b_s имеют разные знаки.

2. (ММО-1988) Пусть p — многочлен n -й степени, имеющих n различных вещественных корней. Докажите, что множество решений неравенства $\frac{p'(x)}{p(x)} > 1$ является объединением конечного количества интервалов и найдите их длину.

3. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_7$, $y_1 < y_2 < \dots < y_7$, $x_1 < y_1$ и $\sum_{i=1}^7 x_i^k = \sum_{i=1}^7 y_i^k$ для любого $k \in \{1, \dots, 6\}$. Тогда $x_7 < y_7$.

4. *Неравенства Маклорена.* Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$ и $M_k = \sqrt[k]{\sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}}{C_n^k}}$. Тогда $M_1 \geq \dots \geq M_n$.

Вышеприведенные задачи непростые. Задача 7 (см. далее) является подсказкой к некоторым из них.

5. Найдите количество решений уравнения $x^3 + px + q = 0$ (в зависимости от параметров p, q).

6. Найдите количество решений уравнения (в зависимости от параметров p, q)

(а) $x^4 - x^2 + px + q = 0$.

(б) $x^4 + x^2 + px + q = 0$.

Задача о нахождении количества вещественных корней (без учета кратности) произвольного многочлена четвертой степени сводится к приведенной задаче 6. Вряд ли Вам удастся решить ее без правила Штурма, которое Вы придумаете позже.

2-я серия.

7. (а) Если $p(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$, то $\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x - a_1} + \dots + \frac{1}{x - a_n}$.

(б) Между любыми двумя вещественными корнями многочлена лежит некоторый корень его производной.

(с) Комплексные корни производной многочлена с комплексными коэффициентами лежат внутри выпуклой оболочки его корней.

Следующие задачи посвящены правилу Штурма нахождения количества вещественных решений (т. е. корней без учета кратности) уравнения $p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0 = 0$.

8. Число действительных корней многочлена p равно числу вертикальных асимптот графика функции p'/p .

Как найти число асимптот, не зная разложения многочлена на множители, т.е. корней?

Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *точкой подъема* функции f , если существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(t) < y$ при $x - \varepsilon < t < x$ и $f(t) > y$ при $x < t < x + \varepsilon$.

Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *точкой спуска* функции f , если существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(t) > y$ при $x - \varepsilon < t < x$ и $f(t) < y$ при $x < t < x + \varepsilon$.

Например, для $f(x) = x^2$ точка $x = 1$ есть точка подъема, точка $x = -1$ есть точка спуска, а точка $x = 0$ не есть ни точка подъема, ни точка спуска.

¹Обновляемая версия: www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf.

Алгебраическим числом прообразов значения y функции f называется число $a(f, y) = p - s$, где p и s — количества точек подъема и спуска среди прообразов точки y . (Оно определено, если число прообразов точки y конечно.)

Например, $a(x^2, 1) = 0$, $a(x^2, 0) = 0$, $a(x^2, -1) = 0$.

9. Число корней многочлена p равно $-a(p'/p, y)$ для достаточно большого y .

10. Найдите $a(f, y)$ для

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ и $y = -1$;

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ и $y = 100$;

(c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ и $y = 0$;

(d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ и $y = -100$;

(e) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 1$ и $y = -100$;

(f) $f(x) = 1/x$ и $y = 5$;

(g) $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, y — достаточно большое число.

(h) $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, y произвольно.

11. (a) Если p — многочлен, отличный от константы, то для любого числа a количество решений уравнения $p(x) = a$ конечно.

(b) Если $f = p/q$ — непостоянная дробно-рациональная функция (т.е. отношение многочленов), то для любого числа a количество решений уравнения $f(x) = a$ конечно.

(c) Если a — корень многочлена p , то существуют такие натуральное число k и многочлен g , что $p = (x - a)^k g$ и $g(a) \neq 0$.

12. Пусть $p = p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0$ и $q = q_m x^m + \dots + q_1 x + q_0$ — многочлены, не имеющие общих непостоянных множителей $p_n q_m \neq 0$ и $f = p/q$. Если $n < m$, то пусть $y \neq 0$, а если $n = m$, то пусть $y \neq p_n/q_m$. Тогда число $a(f, y)$ не зависит от выбора y . Поэтому это число будет обозначаться $a(f)$.

Этой задачей можно пользоваться в дальнейшем без доказательства.

13. Найдите $a(f)$ для $f(x) =$ (a) $\frac{1}{x}$; (b) $\frac{1}{x^3 - 3x + 1}$; (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

(d) $f(x) = -x^2 + 4x + 1 + \frac{1}{x + 2}$; (e) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 5}{x + 2}$; (f) $f(x) = \frac{x + 2}{x^3 - x^2 + 5}$.

14. Пусть g , p и q — многочлены, причем $\deg p > \deg q$.

(a) $a(q/p) = -a(p/q)$.

(b) $a(g + \frac{q}{p}) = a(g) + a(\frac{q}{p})$.

(c) Придумайте и докажите правило нахождения количества решений уравнения $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$.

15. (a) Как находить число положительных корней многочлена?

(b) Как находить число корней многочлена на заданном промежутке $[a, b]$?

(c) Как находить число вещественных корней многочлена с учетом кратности?

Знаменитая нерешенная проблема: как находить число комплексных корней многочлена (с учетом кратности), лежащих в правой полуплоскости?

Решения и указания.

2. Ответ: n .

5. 1, 2 или 3 корня в зависимости от того, положительное, нулевое или отрицательное число $(p/3)^3 + (q/2)^2$.

8. $p(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) f(x)$, где $f(x) > 0$.

9. В обозначениях задачи 11с $\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{k}{x - a} + \frac{g'}{g}$.

11. Используйте теорему Безу и ее следствия.

(а) Предположим, что уравнение $p(x) = a$ имеет бесконечное число решений. Тогда по определению многочлен $q(x) = p(x) - a$ имеет бесконечно много корней. Тогда многочлен $q(x)$ равен нулю тождественно. Значит, многочлен $p(x)$ равен a тождественно, то есть постоянен.

12. Используйте, что непостоянная дробно-линейная функция имеет конечное число корней, и теорему о существовании корня непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.

14с. *Ответ. Теорема Штурма.* Для многочленов $f(x)$ и $p(x) = p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0$, $p_n \neq 0$ обозначим

$$a(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном} \\ 1 & \text{при } n \text{ нечетном и } p_n > 0 \\ -1 & \text{при } n \text{ нечетном и } p_n < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{f'}{f} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k}}}$$

с некоторыми многочленами q_1, \dots, q_k . Тогда количество решений уравнения $f(x) = 0$ равно

$$a(q_1) - a(q_2) + \dots + (-1)^{k+1} a(q_k).$$

15. Можно считать, что $p(0) \neq 0$.

(а) Число положительных корней равно $k_+(p) = k(p(x^2))/2 = -a\left(\frac{xp'(x^2)}{p(x^2)}\right)/2$, где $k(q)$ — число корней многочлена q .

(б) $k_+(p(x-a)) - k_+(p(x-b))$.

(с) $k(p) + k(\text{GCD}(p, p')) + k(\text{GCD}(p, p', p'')) + \dots + k(\text{GCD}(p, p', \dots, p^{(\deg p - 1)}))$.