Неравенства

Кудряшов Юрий, Летняя школа «Олимпиады и математика», Дубна, 2005

Определение 1. Число
$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k+\ldots a_n^k}{n}}$$
называется *средним k-й степени* набора $\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Определение 2. Среднее первой степени называется *средним арифметическим*, а минус первой — *средним гармоническим*.

Определение 3. Число
$$\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$$
называется *средним геометрическим* набора $\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Задача 1. Докажите неравенства:

(а) $\sqrt[k]{\frac{a_1^k+\ldots+a_n^k}{n}} \geqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$;
(б) $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$;
(в) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;
(г) $4(x^6+y^6) \geqslant (x^3+y^3)(x^2+y^2)(x+y)$;
(д) если $a,b,c \geqslant 0$ и $a+b+c=1$, то $(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c)$;
(е) если $xyzt=1$, $x,y,z,t>0$, то $x^4+y^4+z^4+t^4 \geqslant x+y+z+t$;
(ж) $(a_1+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$;
(з) $\frac{n^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$;
(и) если $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, то
$$n(x_1y_n+\ldots+x_ny_1) \leqslant (x_1+\ldots+x_n)(y_1+\ldots+y_n) \leqslant n(x_1y_1+\ldots+x_ny_n);$$
(к) $n\sum\limits_{i=1}^n x_i \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2$;
(л) $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2$;
(м) $4xy+7zt \geqslant (5x^2+z^2)(4y^2+50t^2)$;
(н) $\frac{x_1^2}{y_1}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{y_1+\ldots+y_n}$;
(о) $\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{2}$;
(п) $\frac{x_1^2}{x_1+2x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_n+2x_1+x_2} \geqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{4}$;
(р) $(x_1^3+\ldots+x_n^3)(y_1^3+\ldots+y_n^3)(z_1^3+\ldots+z_n^3) \geqslant (x_1y_1z_1+\ldots+x_ny_nz_n)^3$;