**Параллельный перенос плоскости Лобачевского**

**1.Определение**

В геометрии Евклида параллельный перенос определяется как композиция осевых симметрий относительно двух параллельных прямых, но в геометрии Лобачевского параллельные прямые бывают двух видов, поэтому стоит рассмотреть два параллельных переноса и подумать, совпадают ли они.

**Определение.** T1(параллельный перенос первого рода) – это композиция двух осевых симметрий относительно прямых, имеющих общую идеальную точку.

**Определение.** Т2(параллельный перенос второго рода) – это композиция двух осевых симметрий относительно расходящихся прямых.

Но, кроме того, в евклидовой геометрии есть ещё одно определение T=Zo2 ° Zo1, где Zo – центральная симметрия относительно точки о. Естественно дать это определение и в геометрии Лобачевского.

**Определение.** T3(параллельный перенос третьего рода) – это композиция двух центральных симметрий.

Несложно доказать, что в геометрии Евклида эти определения равнозначны, а доказательство этого один в один проходит и здесь.

**Теорема.** Т2=Т3.

Доказательство

1.Пусть T3= Zo2 ° Zo1.

2.Положим O1O2=l. Пусть l1 и l2 такие прямые, что l1 ⊥ l, l1 ∩ l=O1, l2 ⊥ l, l2 ∩ l=O2.

3.По свойству центральной симметрии Zo2=Sl2 ° Sl, Zo1=Sl ° Sl1(т.к. l1 ⊥ l и l2 ⊥ l ), где Sl - осевая симметрия относительно прямой l, => T3 = Zo2 ° Zo1 = Sl2 ° Sl ° Sl ° Sl1 = Sl2 ° Sl1.

4.Итак, T3 = Sl2 ° Sl1, но l1 и l2 - расходящиеся прямые, т.к. l - их общий перпендикуляр => Sl2 ° Sl1=Т2(по опр. Т2).

Таким образом, любое движение Т3 - это Т2, аналогично доказывается и обратное, т.е. что любой Т2 представляется композицией двух центральных симметрий.

**2.Траектории точек**

Итак у нас есть два определения параллельного переноса. Вскоре будет показано, что они не совпадают. Теперь же сравним основные свойства Т1 и Т2 с свойствами евклидового параллельного переноса. Сначала рассмотрим вопрос о траекториях движения точек.

Пусть прямые l1 и l2 имеют общую точку О на абсолюте. Рассмотрим произвольную инверсию с центром в О. Прямые l1 и l2 перейдут тогда в евклидовы перпендикуляры к абсолюту, а T1 = Sl2 ° Sl1 станет обычным евклидовым параллельным переносом на вектор, параллельный абсолюту. В этом случае траектории движения точек будут евклидовыми прямыми, параллельными абсолюту. При обратной инверсии эти прямые перейдут в окружности, касающиеся абсолюта в точке О, т.е. в орициклы. Таким образом, траектории движения точек при Т1 являются орициклами.

Теперь рассмотрим параллельный перенос второго рода. Пусть Т2 = Sl2 ° Sl1, а l - прямая, такая что l1 ⊥ l и l2 ⊥ l. Пусть О - любая общая точка l и абсолюта. Аналогично действиям с Т1 рассмотрим произвольную инверсию Inv с центром в точке О. Тогда l перейдёт в перпендикуляр, а l1 и l2 - в концентрические окружности с центром в КI, где КI=Inv(К), а К - вторая точка пересеченияl с абсолютом.

Композиция инверсий относительно l1I и l2I(образы l1 и l2 при инверсии Inv) будет гомотетией. Таким образом, евклидова гомотетия с центром на абсолюте будет параллельным переносом второго рода. Как известно, при этом преобразовании траектории точек это лучи, выходящие из точки Кl(центр гомотетии). При обратной инверсии они перейдут в дуги окружностей, содержащих точки О и К, т.е. в эквидистанты(за исключением одной единственной прямой - прямой l). Итак, мы ответили на вопрос о траекториях: для Т1 это орициклы, а для Т2 - эквидистанты(и одна прямая).

Рассматривая вопрос о траекториях, мы использовали важный факт: инверсия "не искажает" параллельного переноса, и мы можем для удобства рассматривать евклидовый параллельный перенос или гомотетию. Доказательством этого служит одно важное свойство инверсии: если А и АI симметричны относительно окружности ω, а А1, А1I и ω1 - их образ при инверсии относительно окружности α, то А1 и А1I будут симметричны относительно ω1. Этой возможностью "улучшать" для нашего удобства параллельный перенос мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Рассмотрев вопрос о траекториях, мы доказали также, что семейство орициклов, касающихся О, и семейство эквидистант с базой l являются инвариантными кривыми, т.е. остаются на месте при соответствующем переносе.

**3.Некоторые свойства**

Сейчас мы рассмотрим некоторые основные свойства параллельного переноса в евклидовой геометрии и покажем, что на плоскости Лобачевского они не верны. Если в евклидовой геометрии имеет место теорема о том, что прямая переходит в параллельную себе или остаётся на месте, то здесь это неверно.

Пусть m - произвольная прямая, Т1(m) - её образ, тогда могут быть реализованы все три варианта: m ∩ Т1(m), m II Т1(m) и m расходится с Т1(m). В этом легко убедиться, рассмотрев евклидов параллельный перенос вдоль абсолюта, который и является частным случаем Т1. Действительно, он может перенести евклидову полуокружность в полуокружность, пересекающую, касающуюся и не пересекающую исходную.

Абсолютно аналогично утверждение доказывается и для Т2, в чём можно убедиться, рассмотрев гомотетию.

Неверна также и теорема о том, что параллельный перенос однозначно задаётся образом одной точки и самой этой точкой.

**Теорема.** ∀ A,B ∃ ровно два Т1: В=Т1(А).

Доказательство

1.Несложно проверить, что через две точки всегда проходит два орицикла. Поэтому есть только два класса параллельных переносов, в каждом из которых движение происходит по одному из двух орициклов. Если мы докажем, что существует лишь один перенос, переводящий А в B по данному орициклу, т.е. траекторией которого является данный орицикл, то утверждение теоремы будет доказано. А это становится очевидным, если мы переведём орицикл в евклидову прямую, параллельную абсолюту с помощью инверсии.

**4.Выбор прямой**

Следующее свойство параллельного переноса, пожалуй, единственное, которое сохраняется и на плоскости Лобачевского.

**Теорема.** Пусть T1 = Sl2 ° Sl1, O = l1 ∩ l2, O лежит на абсолюте и на неевклидовой прямой m. Тогда 1. ∃! прямая k2: T1 = Sk2 ° Sm, 2. ∃! прямая k1: T1=Sm ° Sk1.

Доказательство

Сначала докажем первое утверждение. Пусть О - общая точка прямых l1, l2 и m на абсолюте. Рассмотрим инверсию с центром в О, тогда эти прямые перейдут в евклидовы перпендикуляры к абсолюту l1I, l2l и ml, тогда T1l = Sl2l ° Sl1l, но тогда существует прямая k2l: T1l = Sl2l ° Sl1l = Sk2l ° Sml(это известное свойство евклидового параллельного переноса), при обратной инверсии получаем Т1=Sk2 ° Sm. Аналогично доказывается и второе утверждение.

**Теорема.** Пусть Т2 = Sl2 ° Sl1, h - прямая: h ⊥ l1, h ⊥ l2, m - произвольная прямая: m Т⊥ h. Тогда 1. ∃! прямая k2: Т2 = Sk2 ° Sm, 2. ∃! прямая k1: Т2 = Sm ° Sk1.

Доказательство

1. Пусть О - идеальная точка на прямой h, рассмотрим инверсию с центром в О, тогда прямые l1 и l2 перейдут в евклидовы концентрические окружности l1I и l2l, т.к. hl ⊥ l1l, hl ⊥ l2l и hl - евклидов луч. Пусть Нl - его идеальная точка.

2.Пусть Х - произвольная точка, Х1=Invl1l(X), Х2=Invl2l(X1), тогда НlХ1=(r1l)2/ НlХ (по определению инверсии), НlХ2=(r2l)2/ НlХ1, где r1l - радиус окружности l1I, r2l - радиус окружности l2I, тогда НlХ2= НlХ\*( r2l/ r1l)2, т.е. Т2l = Sl2l ° Sl1l - евклидова гомотетия (по опр.), т.к. Х2, Нl, Х лежат на одной прямой.

3.ml = Inv(m), тогда ml - тоже концентрическая окружность с центром в Нl, т.е. если Rml - её радиус, то ∃! окружность k2l с центром в Нl и радиусом (r2l/ r1l)\*Rm, тогда Sk2l ° Sml - гомотетия с центром Нl и коэффициентом (r2l \* Rm /r1l \* Rml) - аналогично доказанному свойству, т.е. с коэффициентом ( r2l/ r1l)2, т.е. эта гомотетия и есть T2l.

4.Таким образом, Т2l = Sl2l ° Sl1l = Sk2l ° Sml, аналогично доказывается существование прямой k1l: Т2l = Sm ° Sk1. Применив инверсию, обратную Invo, получим доказательство теоремы.

Таким образом, мы можем выбирать одну из двух прямых, задающих параллельный перенос: 1.Из множества прямых, одновременно параллельных двум данным(проходящих через их общую идеальную точку) в случае Т1, и 2.Из множества прямых, перпендикулярных общему перпендикуляру двух данных в случае Т2, - произвольно, а вторая будет определяться. Стоит отметить, что мы не доказали единственность таких вторых прямых. В первой теореме прямая k2 и k1 определяются однозначно, что следует из свойств евклидового параллельного переноса. Во второй однозначность следует из-за единственности решения линейных уравнений: либо ( r2l/ r1l)2=(x/Rm)2, либо ( r2l/ r1l)2=(Rm/х)2.

**5.Композиции**

Используя свойство о выборе одной из прямых, задающих параллельный перенос, произвольно(среди определённого семейства прямых), мы можем доказать свойства композиций переносов и поворотов на плоскости Лобачевского.

R

R ° R = T1

T2

R

T1 ° T1 = T1

T2

R

T2 ° T2 = T1

T2

**Иными словами композиция двух любых собственных движений(не меняющих ориентацию) может быть любым собственным движением геометрии Лобачевского.**