Работа по геометрии на тему “Теоремы Тебо и Фейербаха”

Ученика 9 кл. Ц.О. №218
Урьева Максима

Руководитель: Горская
Елена Сергеевна,
учитель ЦО №218,
сотрудник МЦНМО, к. ф.-м. н.

Москва, 2012 г.

Оглавление

Краткое содержание 3

Введение 8

Часть I

Центральная теорема

1.1 Вспомогательные леммы 9

1.2 Доказательство центральной теоремы. 12

1.3 Различные случаи расположения окружностей 15

Часть II

Теорема Тебо и теорема Фейербаха

2.1 Теорема Тебо 17

2.2 Теорема Фейербаха 21

Часть III

Задачи 25

Заключение 31

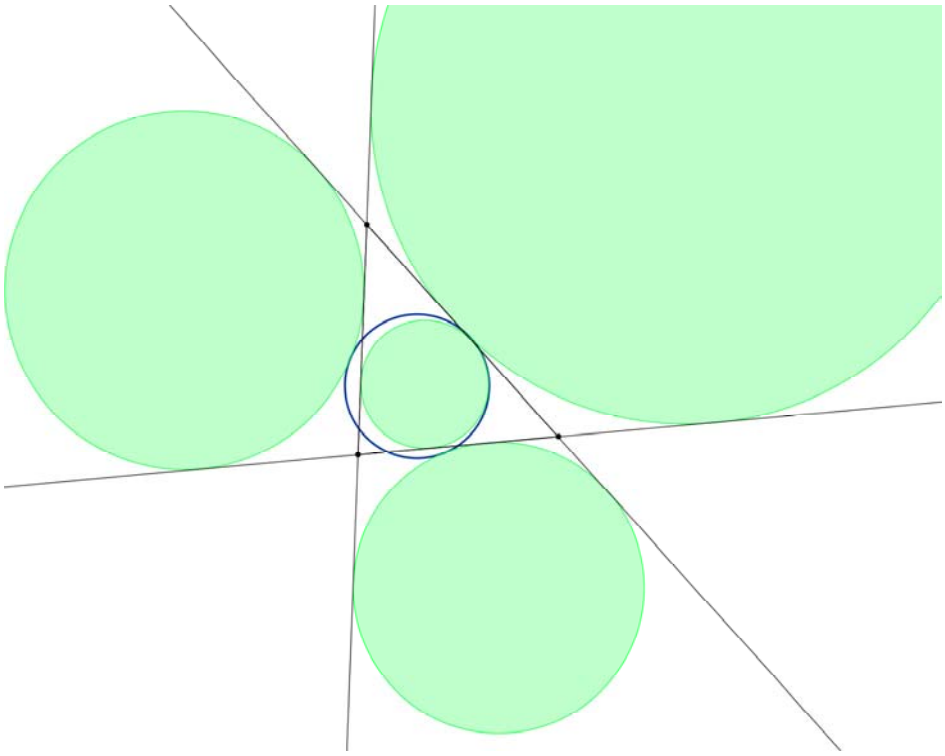
Список литературы 36

Краткое содержание

В работе рассматриваются две известные теоремы о касании окружностей: теорема Фейербаха и теорема Тебо.

Теорема Фейербаха.

Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и вневписанных окружностей этого треугольника.

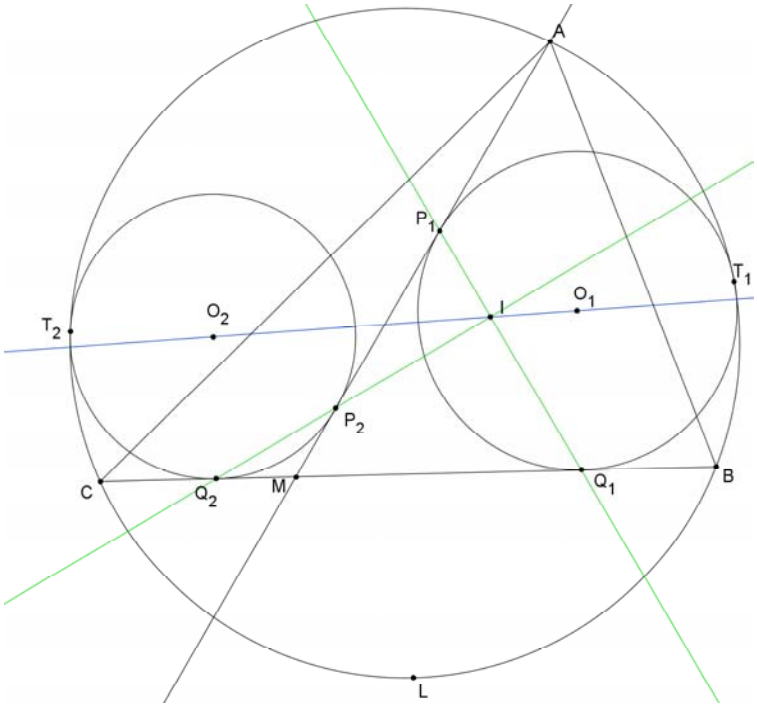


Автор теоремы – Карл Вильгельм Фейербах (1800 – 1834), немецкий математик, старший брат знаменитого немецкого философа Людвига Фейербаха. Он был преподавателем гимназии в небольшом университетском городе Эрланген на юге Германии.

К настоящему времени найдено множество доказательств теоремы Фейербаха, но большинство из них используют инверсию или громоздкие вычисления.

Теорема Тебо

На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка M. В криволинейные треугольники AMB и AMC вписано по окружности (например, окружность, вписанная в криволинейный треугольник AMB, касается отрезков AM в точке P_1, BM в точке Q_1 и описанной окружности треугольника ABC в точке T_1). Тогда линия центров этих окружностей содержит центр вписанной окружности треугольника ABC.

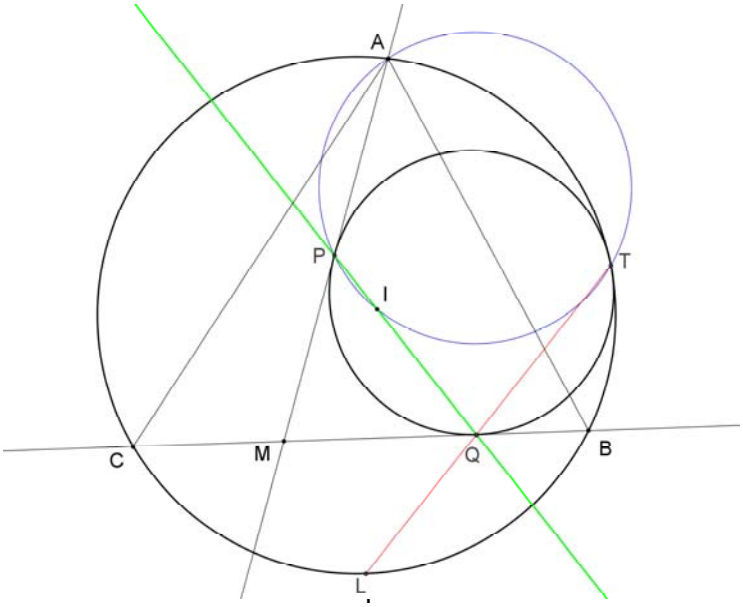


Французский математик Виктор Тебо (1882 – 1960) за свою научную карьеру создал более 1000 теорем и задач и является признанным лидером по этому показателю. Однако Тебо не был профессиональным математиком. Занятия геометрией не могли принести достойного заработка на семью из шести детей, поэтому Тебо в течение многих лет работал в страховой компании, что в истории математики было не редкостью.

В работе рассмотрены доказательства этих теорем и показана связь между ними. Обе теоремы являются частным случаем более общего утверждения, которое мы будем называть центральной теоремой.

Центральная теорема.

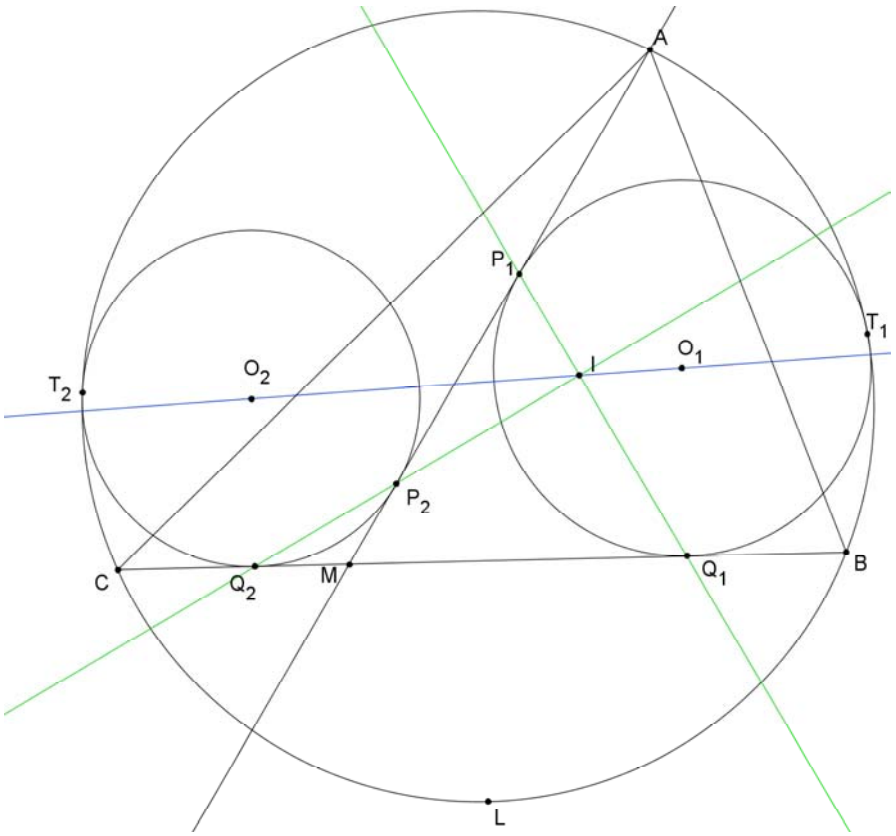
На стороне BC треугольника ABC выбрали произвольную точку M . Окружность α касается описанной окружности треугольника ABC в точке T, отрезка MB в точке Q, P – точка касания окружности α и прямой AM. Тогда точка I (центр вписанной окружности треугольника ABC) лежит на прямой QP.



Так же для доказательства теоремы Фейербаха и теоремы Тебо нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть M_C и M_B – середины сторон AB и AC соответственно, A_1 и B_1 – точки касания прямых CA и CB с вписанной окружностью, а A_2 и B_2 – точки касания с вневписанной окружностью соответственно. Тогда биссектриса угла B, прямые M_CM_B, A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в одной точке.

Доказательство теоремы Тебо. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в криволинейные треугольники AMB и AMC соответственно. По **центральной теореме** P_1, I, Q_1 и P_2, I, Q_2 – лежат на одной прямой.

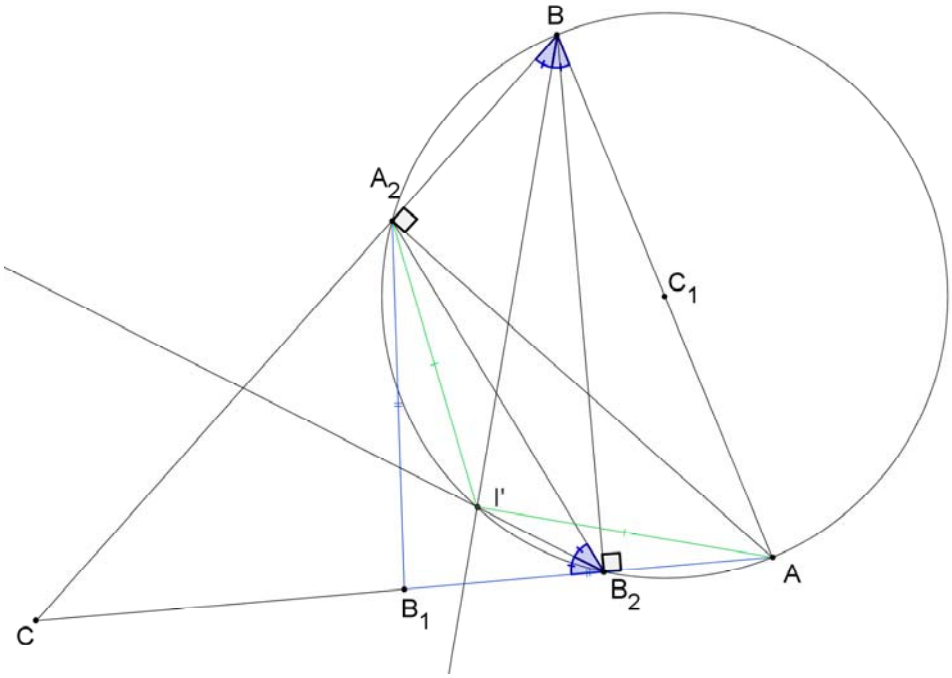


Тогда исходя из **леммы** точка I лежит на прямой O_1O_2.

Окружности, рассмотренные в теореме (с центрами O_1 и O_2) называются окружностями Тебо треугольника ABC.

Доказательство теоремы Фейербаха. Пусть ABC – данный треугольник, A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно, A_2, B_2, C_2 – основания высот, опущенных из вершин A, B и C. Докажем, что вписанная и вневписанная окружности ΔABC, касающиеся стороны AC, являются окружностями Тебо для $\Delta B_1B_2A_2$ и для точки C на прямой B_1B_2, что равносильно **теореме Фейербаха.**

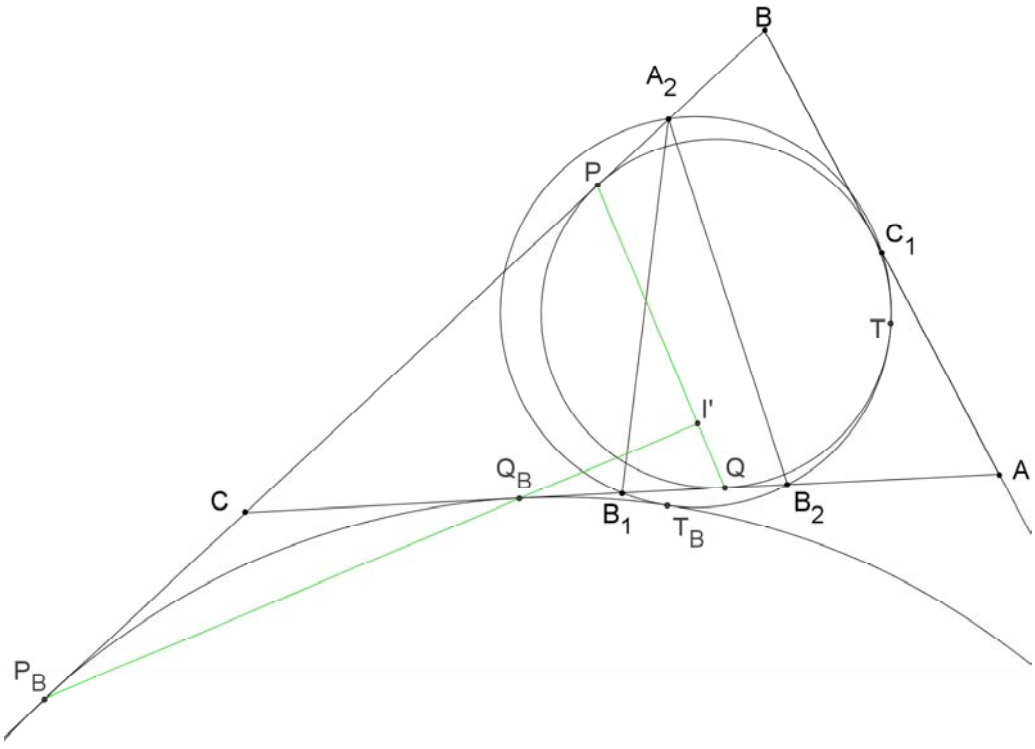
Пусть точка I' – точка пересечения биссектрис углов B и $A_2B_2B_1$. Докажем, что I' – инцентр $\Delta B_1B_2A_2$.



Поскольку AA_2 и BB_2 – высоты, то точки A, A_2, B, B_2 лежат на одной окружности, тогда $\angle A_2B_2B_1 = \angle CBA$. Поэтому $\frac{\angle A_2B_2B_1}{2} = \frac{\angle CBA}{2}$, таким образом, $\angle A_2B_2I' = \angle CBI'$, следовательно, точки I', A_2, B, B_2 лежат на одной окружности. Так как точки A, A_2, B, B_2 лежат на одной окружности и I', A_2, B, B_2 лежат на одной окружности, то A, I', A_2, B, B_2 лежат на одной окружности. Поскольку BI' – биссектриса угла B, то $A_2I'=I'A$. Так как ΔCA_2A – прямоугольный, то $A_2B_1=B_1A$. Следовательно, прямая B_1I' – срединный перпендикуляр к отрезку AA_2, поэтому $B_1I' \| A_2B$ и B_1I' –биссектриса угла A_2B_1A, таким образом, I' – инцентр $\Delta B_1B_2A_2$.

Теперь докажем, что биссектриса угла B и прямая B_1C_1 пересекаются в точке I'.

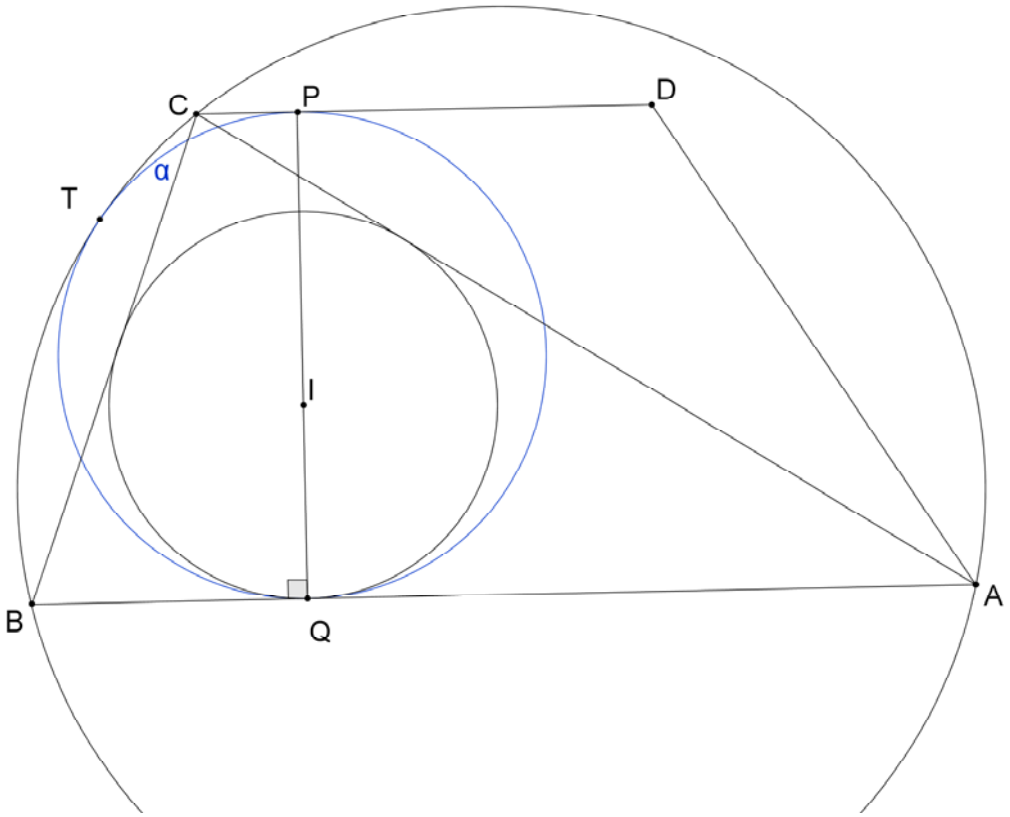
Поскольку $B_1I' \| A_2B$ и B_1I' – проходит через середину отрезка AA_2, то прямая B_1I' содержит среднюю линию ΔBA_2A, параллельную стороне A_2B. Следовательно, прямая B_1I' – проходит через середину отрезка AB, то есть через точку C_1. Таким образом, средняя линия B_1C_1 и биссектриса угла B, пересекаются в инцентре $\Delta B_1B_2A_2$.



Тогда исходя из **леммы**, прямые, содержащие точки касания вписанной и вневписанной окружности с прямыми CA и CB проходят через инцентр $\Delta B_1B_2A_2$ Следовательно, вписанная и вневписанная окружности ΔABC, касающиеся стороны AC, являются окружностями Тебо для $\Delta B_1B_2A_2$.

Помимо доказательств теоремы Фейербаха и теоремы Тебо в работе показано, что применение центральной теоремы существенно облегчает решения задач на касающиеся окружности. Рассмотрим задачу, которая является ярким примером того, что центральная теорема делает решение трудной задачи почти устным.

Задача. Докажите, что в произвольной трапеции $ABCD$ окружность α, касающаяся ее оснований AB и CD и дуги BC описанной окружности ΔABC, касается также и вписанной окружности этого треугольника.



Доказательство. Пусть точки P и Q – точки касания α с прямыми CD и BA соответственно. Поскольку $CD||AB$, то центр окружности α лежит на середине отрезка PQ, исходя из этого $PQ\perp BA$. Пусть I – центр окружности, вписанной в ΔABC. Тогда по **центральной теореме** точка I лежит на прямой PQ. Поскольку $PQ\perp BA$, то Q – точка касания вписанной окружности ΔABC с прямой BA. Окружность, вписанная в ΔABC, и окружность α касаются прямой BA в одной точке, следовательно, эти окружности касаются.

Введение

В работе рассматриваются две красивые теоремы элементарной геометрии: теорема Тебо и теорема Фейербаха. И в той и в другой речь идет о касающихся окружностях, но при этом теоремы настолько различны по формулировкам, что долгое время связь между ними не была установлена. Оказалось, что обе теоремы являются частными случаями более общего утверждения, которое мы будем называть центральной теоремой (она же – лемма Саваямы). Эту связь заметил и обосновал Владимир Юрьевич Протасов (см. журнал "Квант", 2008 год, №4). Работа построена на леммах, теоремах и задачах, взятых из этой статьи. Отметим, что классические доказательства теоремы Фейербаха сложны и требуют громоздких вычислений или применения инверсии, в то время как использование центральной теоремы делает доказательство легким и изящным.

В первой части доказываются вспомогательные утверждения и центральная теорема. Во второй части доказываются теоремы Тебо и Фейербаха. И, наконец, в третьей части рассматриваются различные задачи о касающихся окружностях.

Часть I. Центральная теорема

1.1 Вспомогательные леммы

Лемма 1. Рассмотрим окружности α и β, касающиеся в точке T. Возьмем прямую, касающуюся окружности β в точке Q и пересекающую окружность α в точках A и B. Пусть QT пересекает окружность α в точке L. Тогда L – середина дуги AB, причем $LQ \cdot LT = LA^2 = LB^2$.

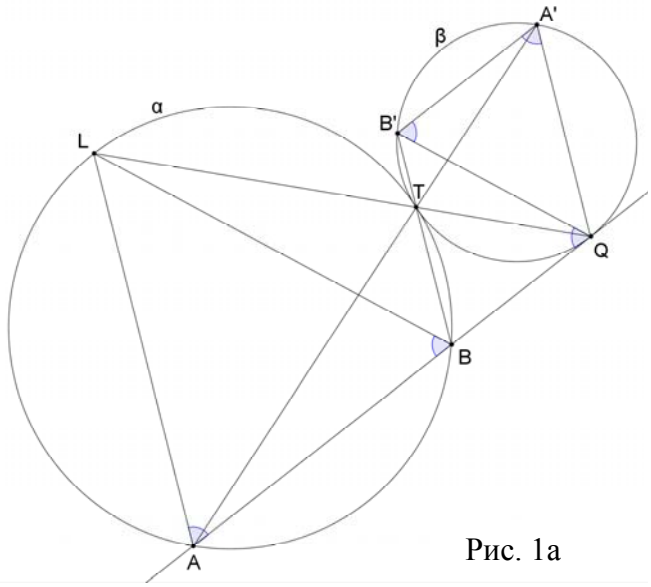


Рис. 1а

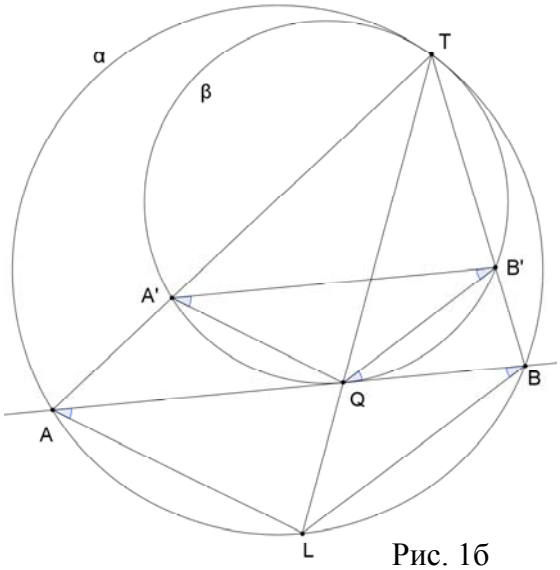


Рис. 1б

Возможны два случая расположения окружностей (см. рис. 1а и 1б). В обоих случаях доказательство проводится аналогично.

Доказательство. Пусть A' и B' – точки пересечения окружности β с прямыми TA и TB соответственно. Тогда при гомотетии с центром в точке T, переводящей α в β, точка A переходит в A', B – в B', L – в Q, T – в T. Прямая AB переходит в прямую $A'B'$, поэтому $AB||A'B'$. Следовательно, углы $B'QB$ и $A'B'Q$ равны. Углы $B'A'Q$ и $B'QB$ равны, поскольку вписанный угол равен углу между касательной и хордой. Получаем, что углы $A'B'Q$ и $B'A'Q$ равны, следовательно, Q – середина дуги $A'B'$. Поскольку отрезок AB перешел в отрезок $A'B'$, а L – в Q, α – в β, то L – середина дуги AB.

При инверсии относительно окружности с центром в точке L и радиусом LA, окружность α перейдет в прямую AB, точка T перейдет в точку на прямой TL. Точка T лежит на окружности α, поэтому образ T лежит на прямой AB. Так как точка Q лежит на пересечении прямых AB и TL, точка T перейдет в Q. По определению инверсии $LT \cdot LQ = LA^2$.

Лемма 2. К окружностям с центрами в точках O_1 и O_2 провели общую внутреннюю касательную A_1A_2 и общую внешнюю касательную B_1B_2 (точки A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_1). На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2. Тогда прямая O_1O_2 – радикальная ось этих окружностей.

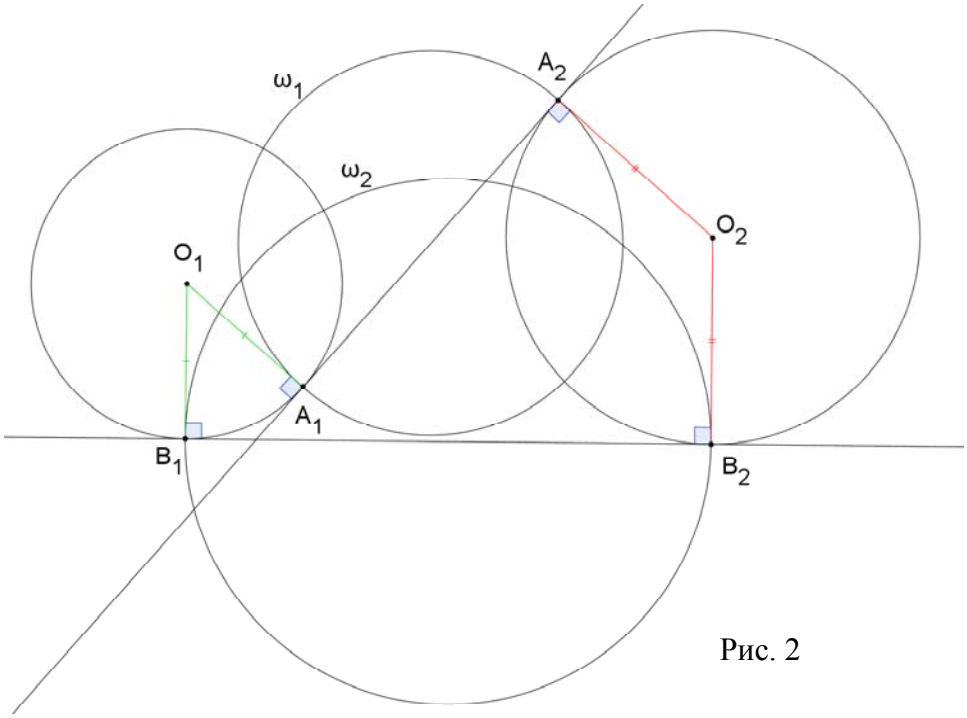


Рис. 2

Доказательство. $O_1B_1 \perp B_1B_2$, B_1B_2 – диаметр окружности ω_2 (см. рис. 2), поэтому O_1B_1 – касательная к окружности ω_2. Аналогично, O_1A_1 – касательная к ω_1. O_1B_1, O_1A_1 – радиусы окружности с центром O_1, исходя из этого $O_1B_1=O_1A_1$. Из теоремы о квадрате касательной получаем, что степень точки O_1 относительно окружностей ω_1 и ω_2 одинакова. Следовательно, O_1 лежит на радикальной оси этих окружностей. Аналогично O_2 лежит на радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2, следовательно, O_1O_2 – радикальная ось ω_1 и ω_2.

Лемма 3. В условиях предыдущей леммы точка пересечения A_1B_1 и A_2B_2 лежит на прямой O_1O_2.

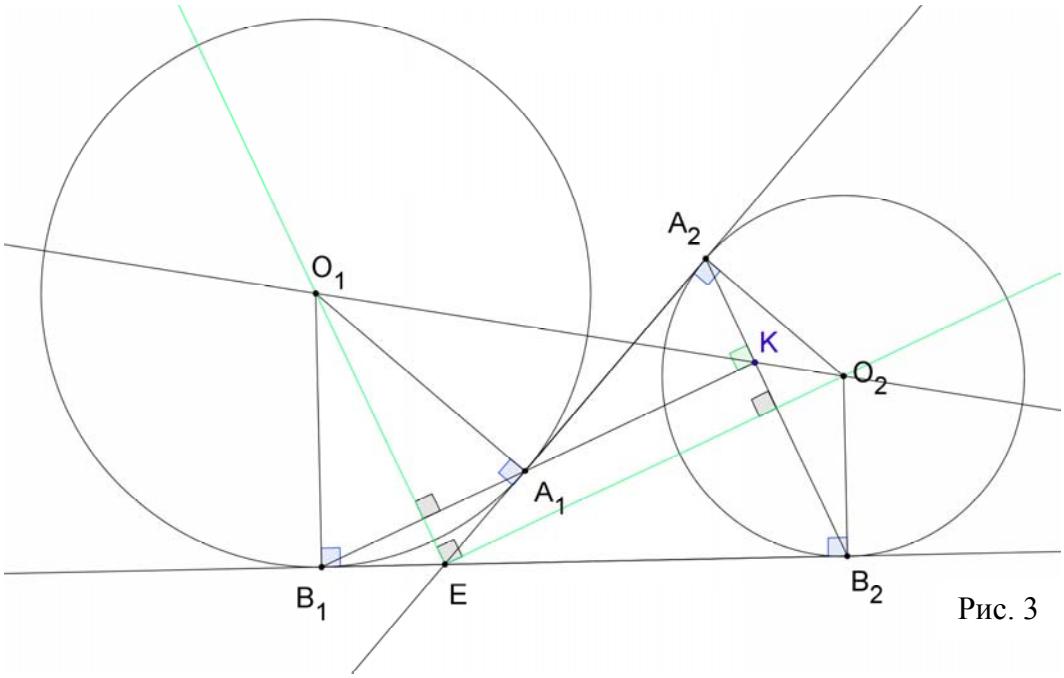


Рис. 3

Доказательство. Пусть E – точка пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2, а K – прямых A_1B_1 и A_2B_2.(см. рис. 3). Тогда $B_1E = A_1E$ и $B_2E = A_2E$, как отрезки касательных. Следовательно, биссектрисы углов A_1EB_2 и B_1EA_2 перпендикулярны прямым A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $A_1B_1 \perp A_2B_2$, откуда углы A_1KA_2 и B_1KB_2 равны 90°, поэтому K – точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Следовательно, K лежит на радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2. Исходя из **леммы 2** радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2 – O_1O_2, K лежит на прямой O_1O_2.

1.2 Доказательство центральной теоремы

Центральная теорема.

На стороне BC треугольника ABC выбрали произвольную точку M . Окружность α касается описанной окружности треугольника ABC в точке T, отрезка MB в точке Q, P – точка касания окружности α и прямой AM. Тогда точка I (центр вписанной окружности треугольника ABC) лежит на прямой QP.

Доказательство.

Первый способ. Пусть L – середина дуги AB, а прямые QP и AL пересекаются в точке I', AL пересекает BC в точке N. A' – точка пересечения AT и окружности α (см. рис. 4а). Тогда из **леммы 1** следует, что T, Q, L лежат на одной прямой.

Покажем, что точка I' совпадает с I, из чего будет следовать утверждение теоремы. Докажем предварительно ряд подобий.

1) $\Delta ACL \sim \Delta CNL$.

Поскольку A, B, L, C лежат на одной окружности, то $\angle(CB, BL) = \angle(CA, AL)$. Из теоремы о трилистнике $CL=LB$, поэтому $\angle(LC, CB) = \angle(CB, BL) = \angle(CA, AL)$. Таким образом, $\Delta ACL \sim \Delta CNL$, поскольку $\angle ALC$ – общий.

2) $\Delta ALT \sim \Delta A'QT$.

При гомотетии с центром в точке T, переводящей окружность α в описанную окружность ΔABC , Q перейдет в L, а A'– в A. Следовательно, $AL||A'Q$, из чего следует, что $\Delta ALT \sim \Delta A'QT$.

3) $\Delta LNQ \sim \Delta QTA'$.

Поскольку BC – касательная к окружности α, то $\angle(QA', A'T) = \angle(BQ, QT) = \angle(NQ, QL)$, а так как $\angle(AL, LT) = \angle(A'Q, QT)$, то треугольники LNQ и QTA' подобны.

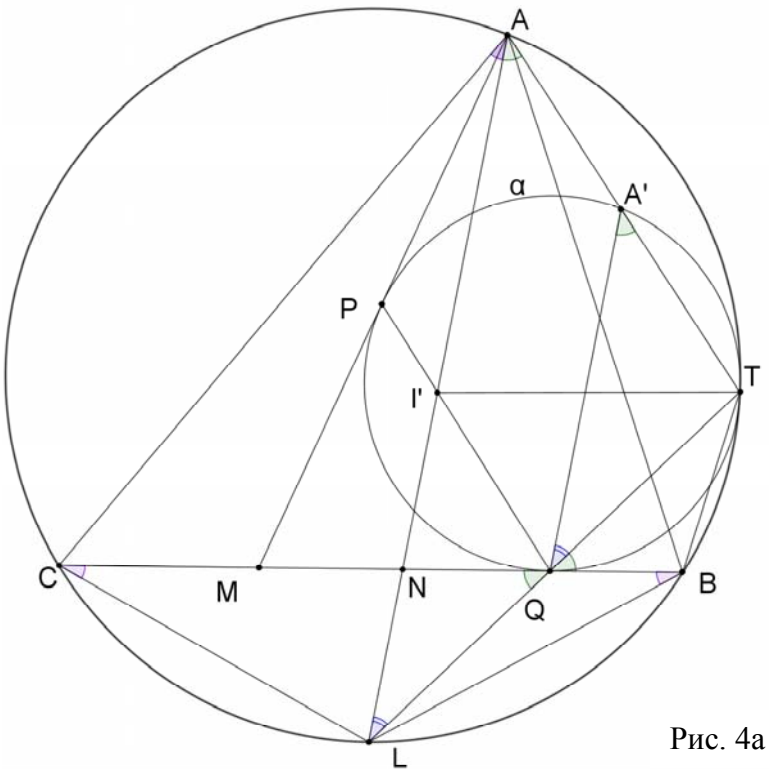


Рис. 4а

4) $\Delta NI'Q \sim \Delta PQA'$ (см. рис. 4б).

Точки Q, P, A', T лежат на одной окружности, следовательно, $\angle(QP, PT) = \angle(QA', A'T)$, кроме того $\angle(LA, AT) = \angle(QA', A'T)$, поэтому точки P, A, T, I' также лежат на одной окружности.

Поскольку QC – касательная к окружности описанной вокруг четырехугольника $PA'TQ$, то $\angle(PA', A'Q) = \angle(PQ, QC)$. Из этого и того что $\angle(LI', I'Q) = \angle(A'Q, QP)$, следует подобие треугольников $NI'Q$ и PQA'.

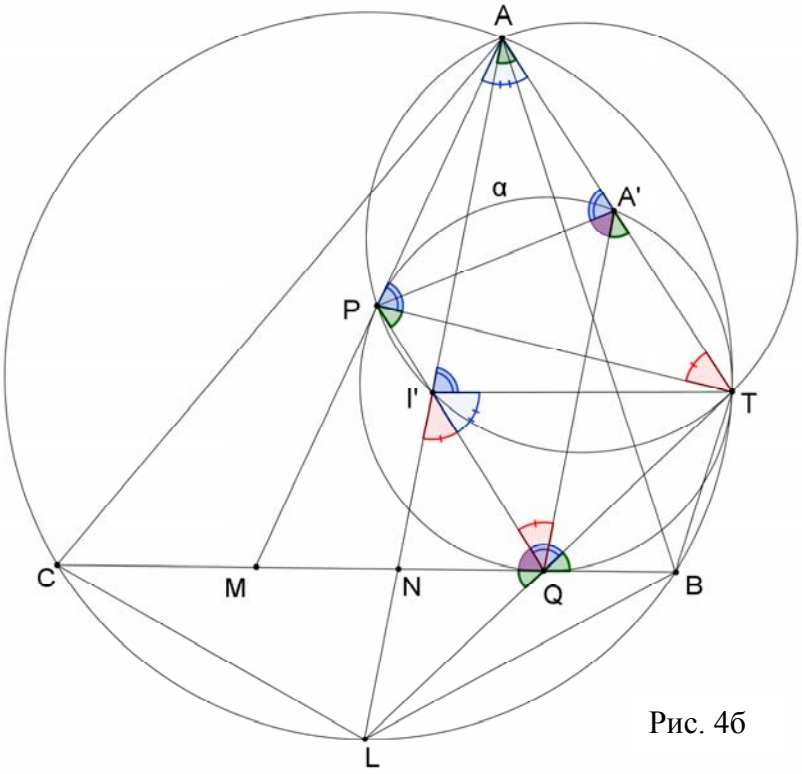


Рис. 4б

5) $\Delta QI'T \sim \Delta PAT$.

AP – касательная к окружности α, следовательно, $\angle(TQ, QP) = \angle(TP, PA)$. Поскольку точки A, T, I', P лежат на одной окружности, то $\angle(PA, AT) = \angle(PI', I'T)$, следовательно, получаем $\Delta QI'T \sim \Delta PAT$.

6) $\Delta PTA \sim \Delta A'PA$.

Из теоремы о квадрате касательной, следует, что $AP^2 = AA' \cdot AT$, кроме того $\angle PAT$ – общий для ΔPTA и $\Delta A'PA$, следовательно, они подобны.

7) $\Delta I'QL \sim \Delta TA'P$.

Из равенств углов $\angle(LI', I'Q) = \angle(A'Q, QP)$ и $\angle(A'T, TP) = \angle(A'Q, QP)$, и того, что $\angle(PA', A'T) = \angle(PA', A'Q) + \angle(QA', A'T) = \angle(PQ, QC) + \angle(CQ, QL) = \angle(PQ, QL)$, следует, что треугольники $I'QL$ и $TA'P$ подобны.

Теперь докажем, что $CL = I'L$.

Из 1) получаем, что $CL = \sqrt{LN \cdot AL}$, из 3) получаем, что $LN = \dfrac{NQ \cdot QT}{TA'}$, из 2) $AL = \dfrac{A'Q \cdot AT}{TA'}$, следовательно, $CL = \dfrac{\sqrt{NQ \cdot QT \cdot A'Q \cdot AT}}{TA'}$. Из 4) следует, что $NQ = \dfrac{I'Q \cdot PA'}{A'Q}$, из 5) следует, что $QT = \dfrac{I'Q \cdot PT}{AP}$. Следовательно $CL = \dfrac{I'Q \cdot \sqrt{\dfrac{PA' \cdot PT \cdot AT}{AP}}}{TA'}$. Из 6) следует, что $PT = \dfrac{AT \cdot PA'}{AP}$, поэтому $CL = \dfrac{I'Q \cdot PT}{TA'}$. И, наконец, из 7) получаем, что $I'L = \dfrac{I'Q \cdot PT}{TA'}$,

следовательно, $CL=I'L$. Поскольку по теореме о трилистнике $CL=IL$, то точки I и I' совпадают, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть прямая QI пересекает окружность α в точке P', A' – точка пересечения AT и α (см. рис. 4в). Покажем, что AP' – касательная к α, то есть точки P и P' совпадают.

Докажем, что $\angle(IT,TL)=\angle(LI,IQ)$.

Из **леммы 1** следует, что точки T, Q, L лежат на одной прямой. При гомотетии с центром в точке T, переводящей окружность α в описанную окружность ΔABC, Q перейдет в L, а A' – в A, следовательно, $AL||A'Q$, откуда получаем, что $\angle(LA,AT)=\angle(QA',A'T)$. Поскольку Q, P', A', T – лежат на одной окружности, то $\angle(QP',P'T)=\angle(QA',A'T)$. Так как $\angle(IA,AT)=\angle(QA',A'T)$, то P', A, T, I лежат на одной окружности. Из **леммы 1** и теоремы о трилистнике следует, что $LQ\cdot LT=LC^2=LI^2$, таким образом, $\frac{LQ}{LI}=\frac{LI}{LT}$, а поскольку $\angle ILT$ – общий для ΔLIQ и ΔLTI, то $\Delta LIQ\sim\Delta LTI$. Следовательно, $\angle(IT,TL)=\angle(LI,IQ)$.

Теперь докажем, что AP'– касательная к окружности α.

Так как точки P', A, T, I лежат на одной окружности, а Q, P', I лежат на одной прямой, то $\angle(P'A,AT)=\angle(P'I,IT)=\angle(QI,IT)$. Аналогично, $\angle(AT,TP')=\angle(AI,IP')=\angle(LI,IQ)$. Из равенства $\angle(IT,TL)=\angle(LI,IQ)$ и того, что T, Q, L лежат на одной прямой, следует, что $\angle(AT,TP')=\angle(LI,IQ)=\angle(IT,TL)=\angle(IT,TQ)$. Так как $\angle(AT,TP')=\angle(IT,TQ)$ и $\angle(P'A,AT)=\angle(QI,IT)$, то $\angle(AP',P'T)=\angle(QI,IT)=\angle(P'Q,QT)$ (точки P', I, Q лежат на одной прямой). Из равенства $\angle(AP',P'T)=\angle(P'Q,QT)$ следует, что AP' – касательная к окружности α, то есть точки P и P' совпадают.

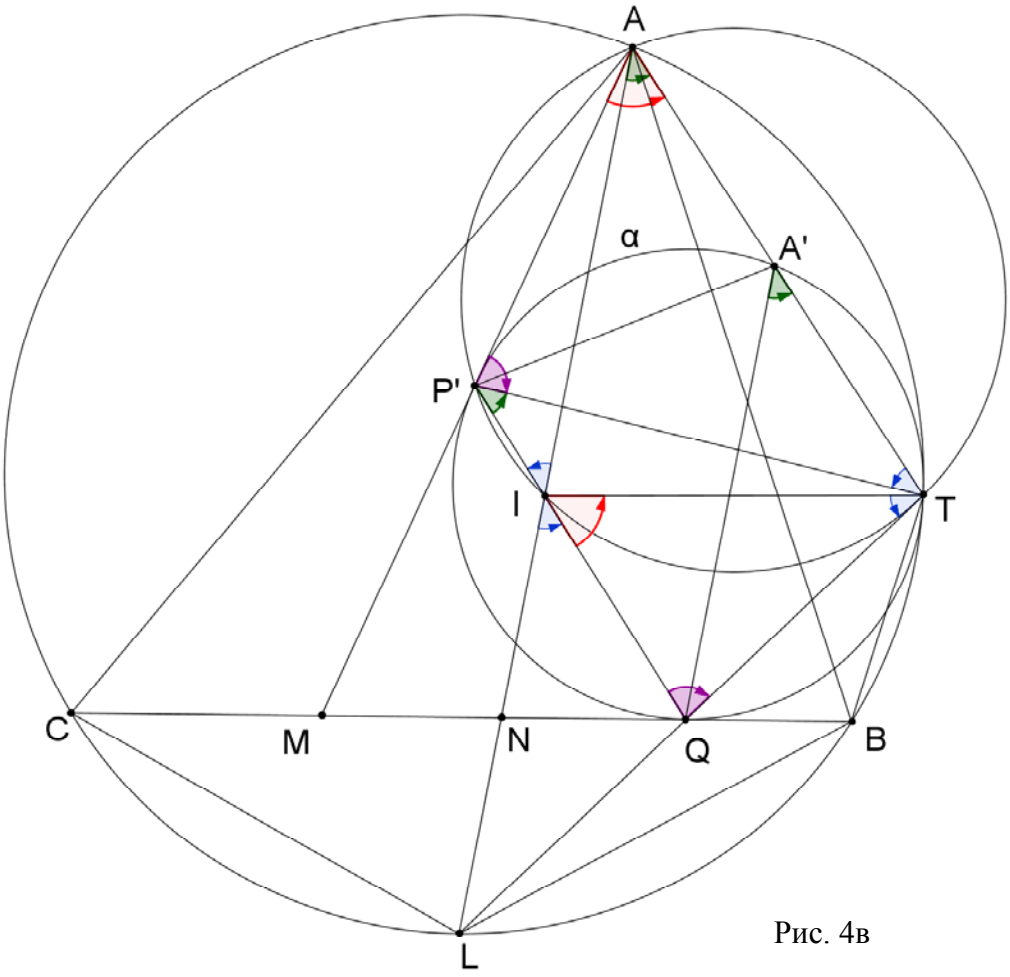
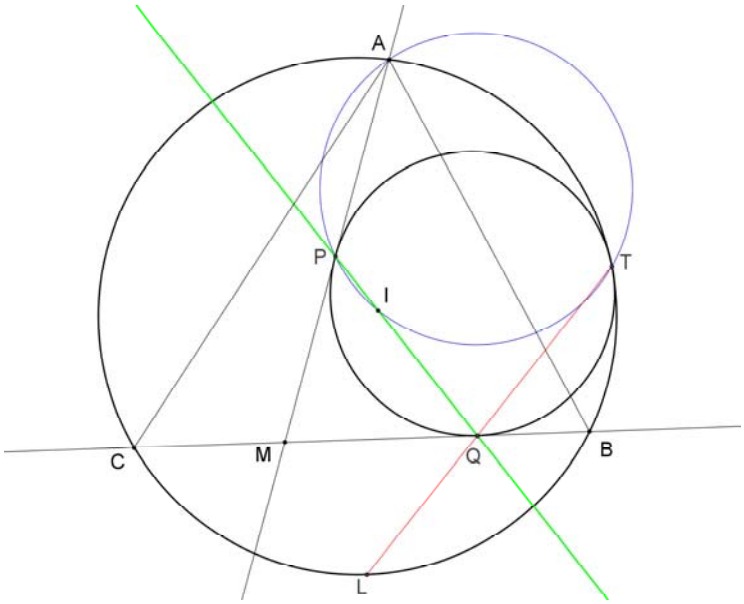
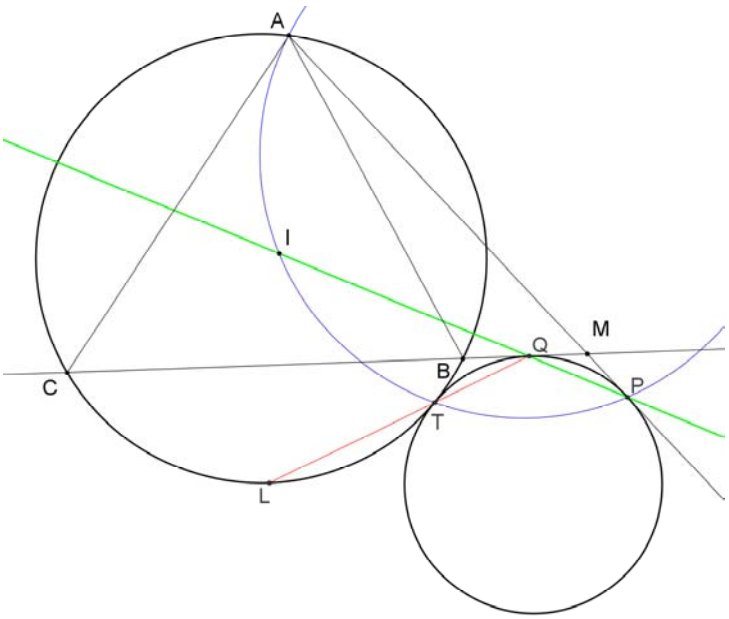


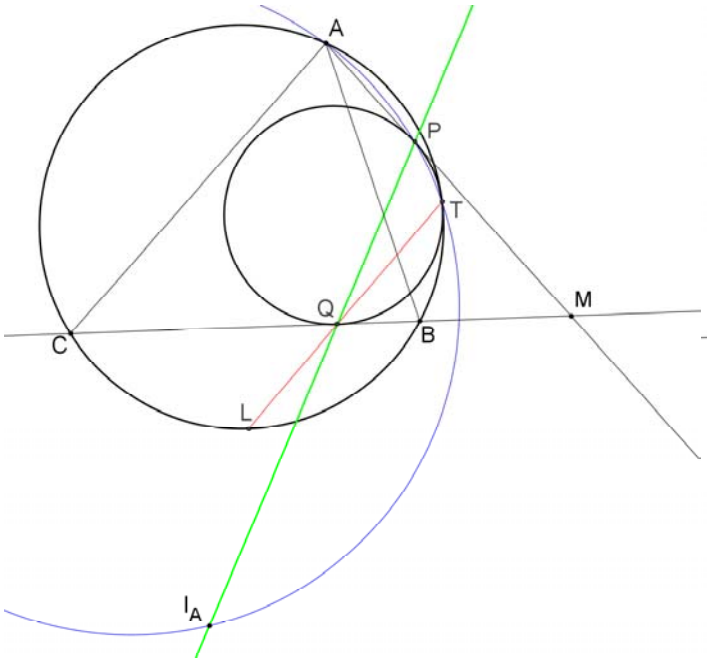
Рис. 4в

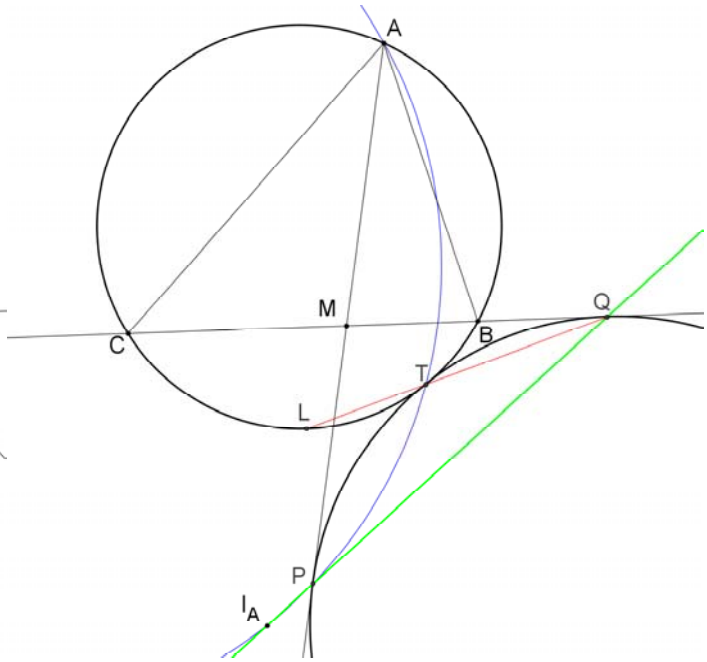
1.3 Различные случаи расположения окружностей

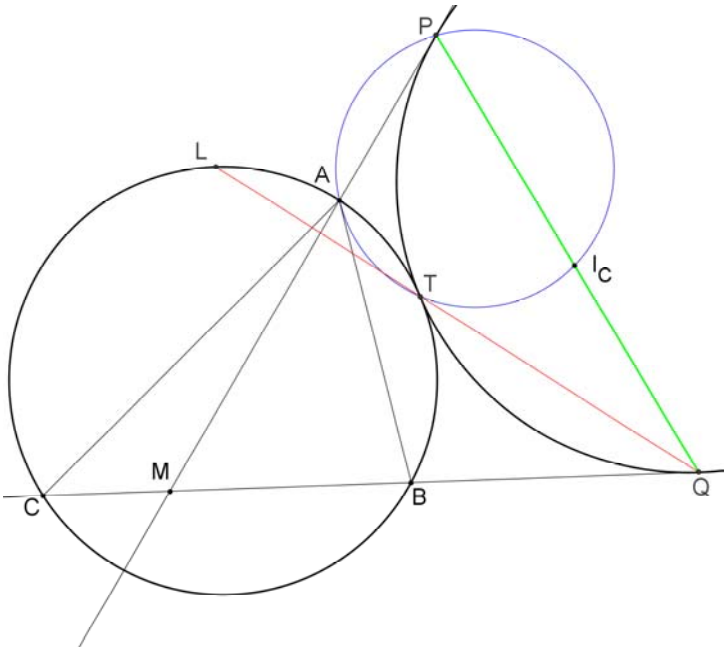
Заметим, что центральная теорема допускает несколько случаев – когда внутреннее касание заменяется внешним, когда окружность касается не отрезка *AM*, а его продолжения, когда точка M лежит вне отрезка *BC*. При этом вместо инцентра иногда нужно рассматривать соответствующие центры вневписанных окружностей. Во всех случаях общим является то, что рассматриваемая окружность касается данной окружности, прямой *AM* и прямой *BC*, а прямая *PQ* содержит либо инцентр, либо какой-то из центров вневписанных окружностей. Доказательство во всех случаях практически одинаково. Ниже приведены возможные рисунки.

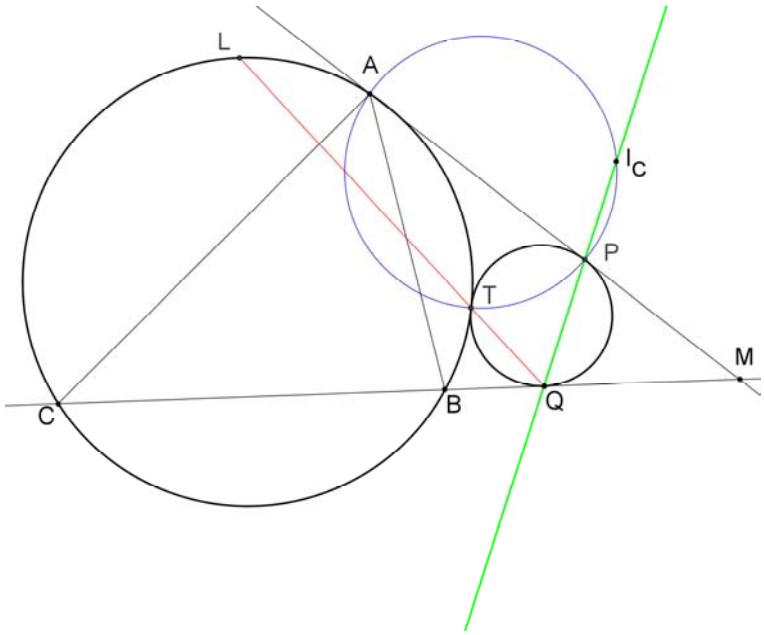


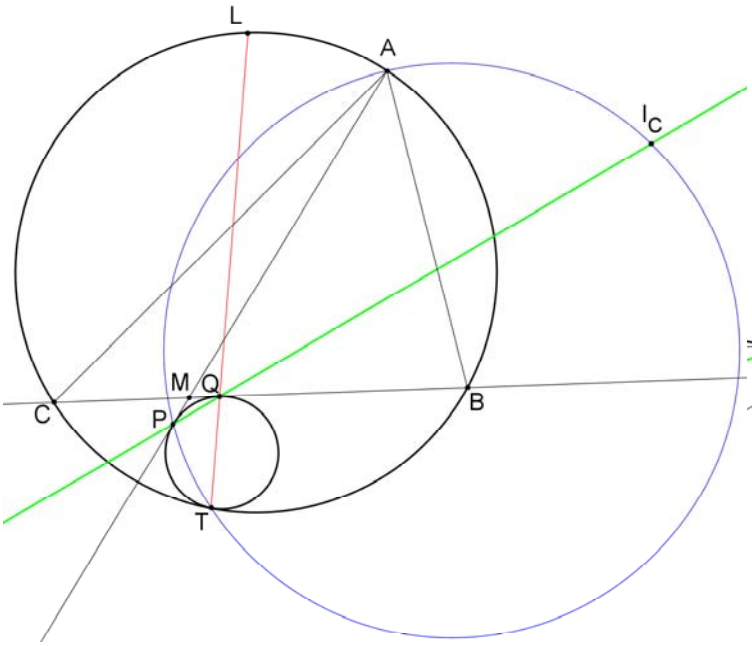


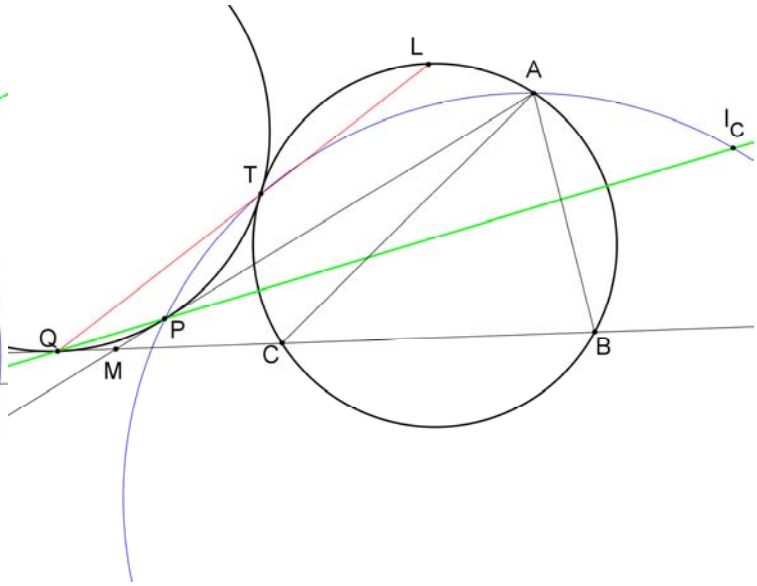





P
L
A
T
I_C
M
C
B
Q


L
A
I_C
P
T
M
C
B
Q


L
A
I_C
M
Q
C
P
B
T


L
A
I_C
T
Q
P
M
C
B

Часть II. Теорема Тебо и теорема Фейербаха

2.1 Теорема Тебо

На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка M. В криволинейные треугольники AMB и AMC вписано по окружности (например, окружность, вписанная в криволинейный треугольник AMB, касается отрезков AM в точке P_1, BM в точке Q_1 и описанной окружности треугольника ABC в точке T_1). Тогда линия центров этих окружностей содержит центр вписанной окружности треугольника ABC.

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в криволинейные треугольники *AMB* и *AMC* соответственно (см. рис. 5а). По **центральной теореме** P_1, I, Q_1 и P_2, I, Q_2 – лежат на одной прямой.

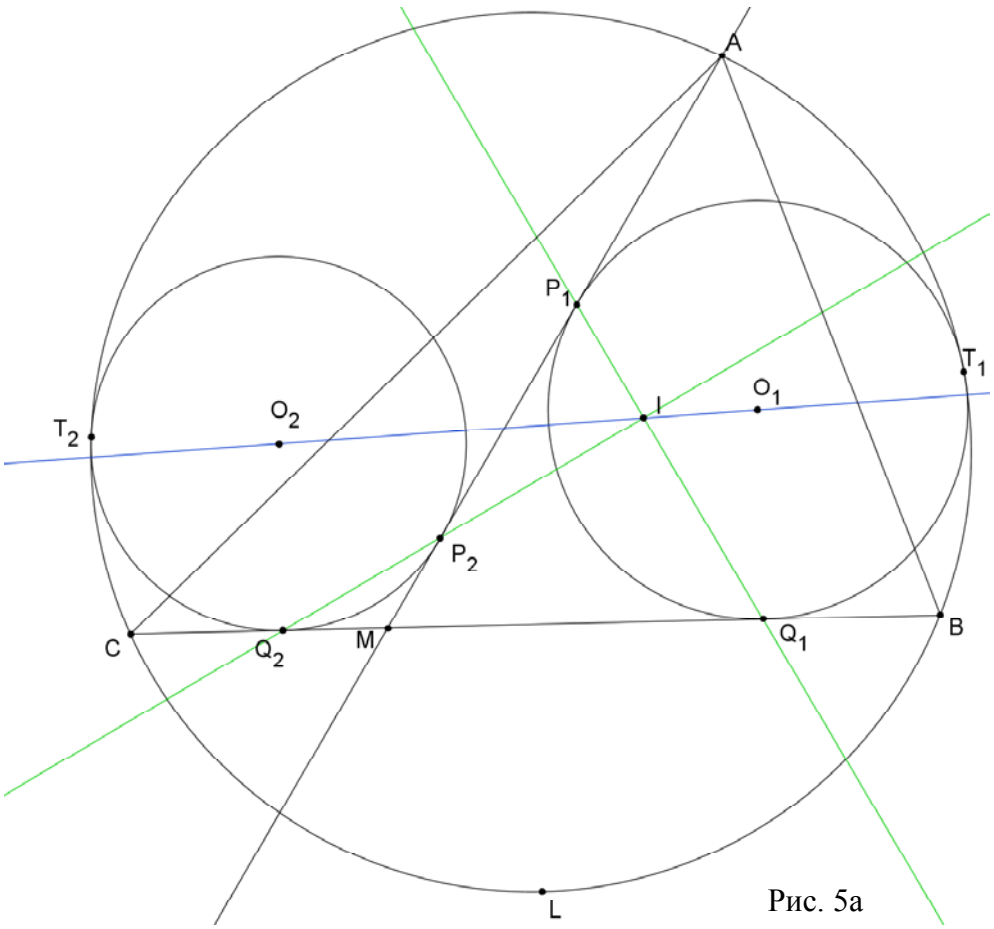


Рис. 5а

Тогда по **лемме 3** точка *I* лежит на прямой O_1O_2.

Комментарий. Окружности, рассмотренные в теореме (с центрами O_1 и O_2) называются окружностями Тебо треугольника *ABC*.

Покажем, как построить окружность Тебо для данного треугольника *ABC* и точки *M*.

Проведем через инцентр треугольника *ABC* прямую, перпендикулярную биссектрисе угла *AMB*, до пересечения с прямыми *AM* и *BM* в точках *P* и *Q* соответственно (см. рис. 5б). Тогда по **центральной теореме** точки *P* и *Q* лежат на окружности Тебо. Затем проведем перпендикуляр к прямой *BC* через *Q*. Точка пересечения этого перпендикуляра с биссектрисой угла *AMB* будет центром окружности Тебо.

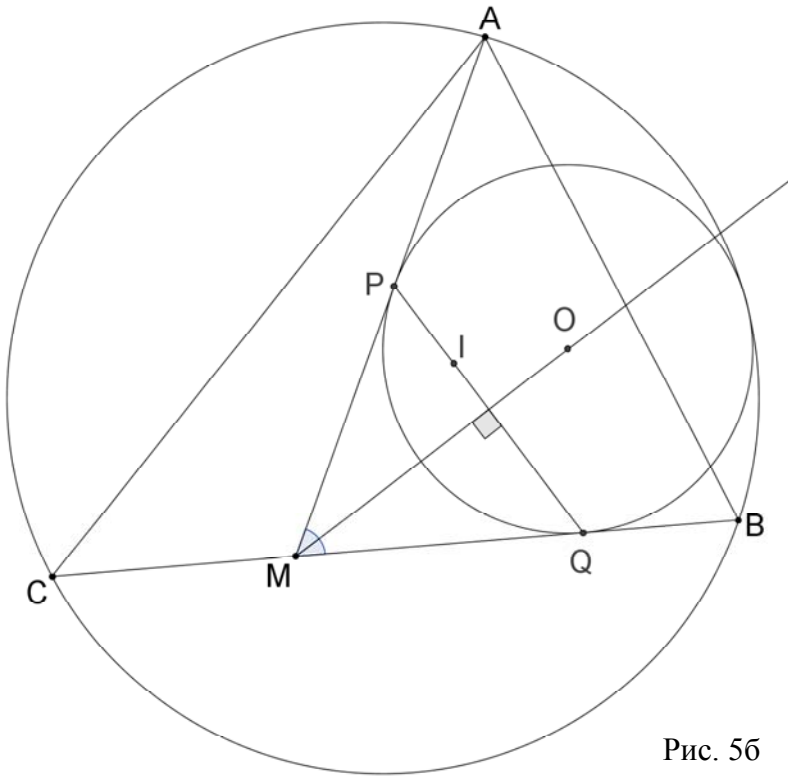


Рис. 5б

Из построения следует, что если прямая содержащая точки касания окружности с прямыми *BC* и *AM* проходит через инцентр, то эта окружность – окружность Тебо.

Как и **центральная теорема,** теорема Тебо также допускает несколько случаев расположения окружностей. Приведем только три из них (см. рис. 5в-д).

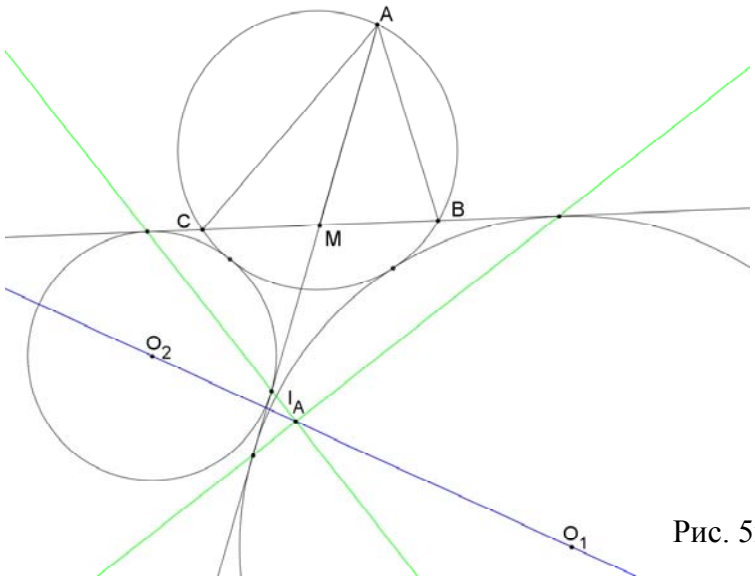


Рис. 5в

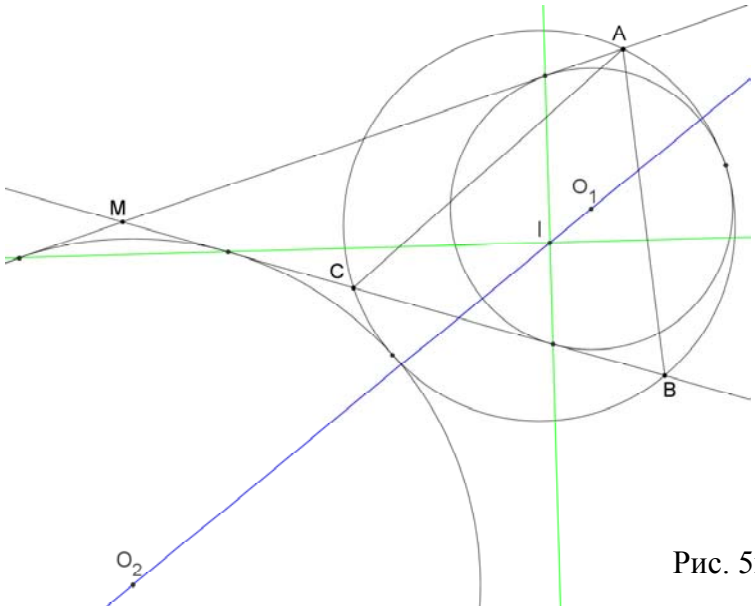


Рис. 5г

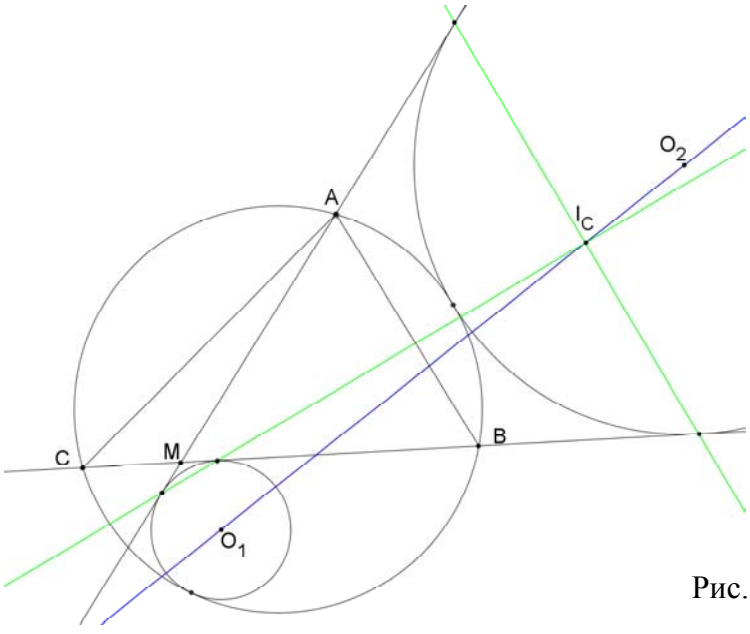


Рис. 5д

2.2 Теорема Фейербаха

Предварительно докажем лемму.

Лемма 4. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть M_C и M_B – середины сторон AB и AC соответственно, A_1 и B_1 – точки касания прямых CA и CB с вписанной окружностью, а A_2 и B_2 – точки касания с вневписанной окружностью соответственно. Тогда биссектриса угла B, прямые M_CM_B, A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть K – точка пересечения биссектрисы угла B и прямой M_CM_B (см. рис. 6а). Тогда поскольку $M_CM_B || BC$, то M_CM_BCB – трапеция. Биссектриса угла трапеции отсекает от нее равнобедренный треугольник, поэтому $M_CK = M_CB = \frac{AB}{2}$. Поскольку M_CM_B – средняя линия, то $M_CM_B = \frac{BC}{2}$, следовательно, $KM_B = |M_CM_B - M_CK| = \frac{|AB - BC|}{2}$.

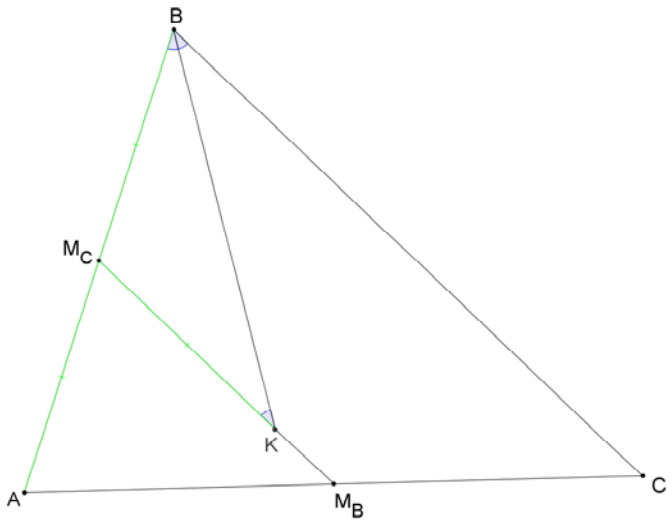


Рис. 6а

Пусть K_1 – точка пересечения средней линии треугольника ABC с прямой A_1B_1 (см. рис. 6б). Так как $M_CM_B || BC$, углы B_1A_1C и $B_1K_1M_B$ равны. Поскольку CA_1 и CB_1 – отрезки касательных, то они равны $p - AB$, где p – полупериметр ΔABC. Следовательно, углы B_1A_1C и A_1B_1C равны. А из равенства углов $K_1B_1M_B$ и $B_1K_1M_B$ следует, что отрезки B_1M_B и K_1M_B равны. Таким образом, $K_1M_B = B_1M_B = |CB_1 - CM_B| = \left|p - AB - \frac{AC}{2}\right| = \frac{|AB - BC|}{2} = KM_B$. Следовательно, точки K и K_1 совпадают.

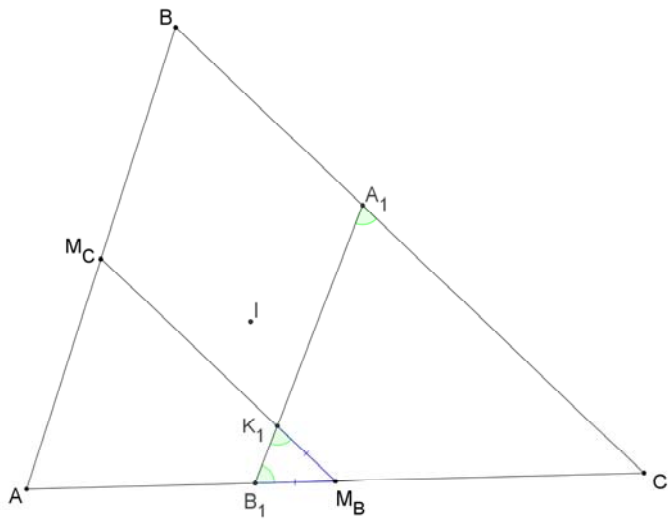


Рис. 6б

Пусть K_2 – точка пересечения средней линии треугольника ABC с прямой A_2B_2 (рис. 6в). Так как M_CM_B|| BC, углы B_2A_2C и $B_2K_2M_B$ равны. Поскольку CA_2 и CB_2 – отрезки касательных, то они равны $p-BC$, где p – полупериметр ΔABC. Следовательно, углы B_2A_2C и B_2A_2C равны. А равенства углов $K_2B_1M_B$ и $B_1K_2M_B$ следует, что отрезки B_2M_B и K_2M_B равны. Таким образом, $K_2M_B = B_2M_B = |CB_2–CM_B| = \left|p-BC-\frac{AC}{2}\right| = \frac{|AB-BC|}{2} = KM_B$. Следовательно, точки K и K_2 совпадают.

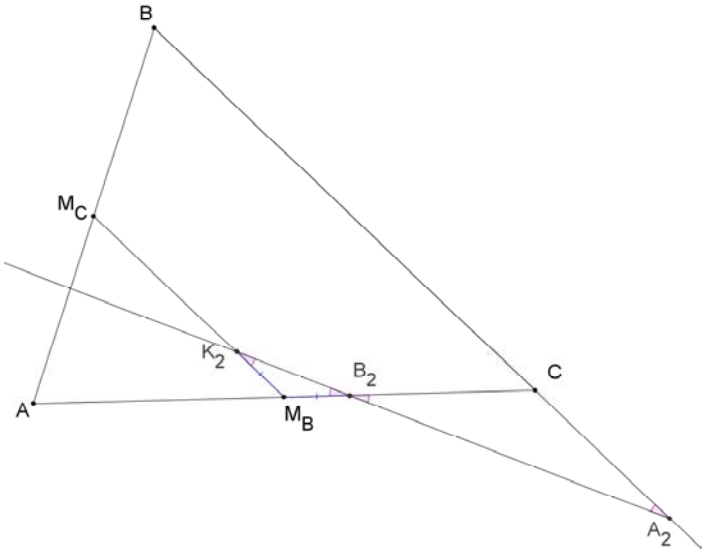


Рис. 6в

Теорема Фейербаха.

Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и вневписанных окружностей этого треугольника (см. рис. 7а).

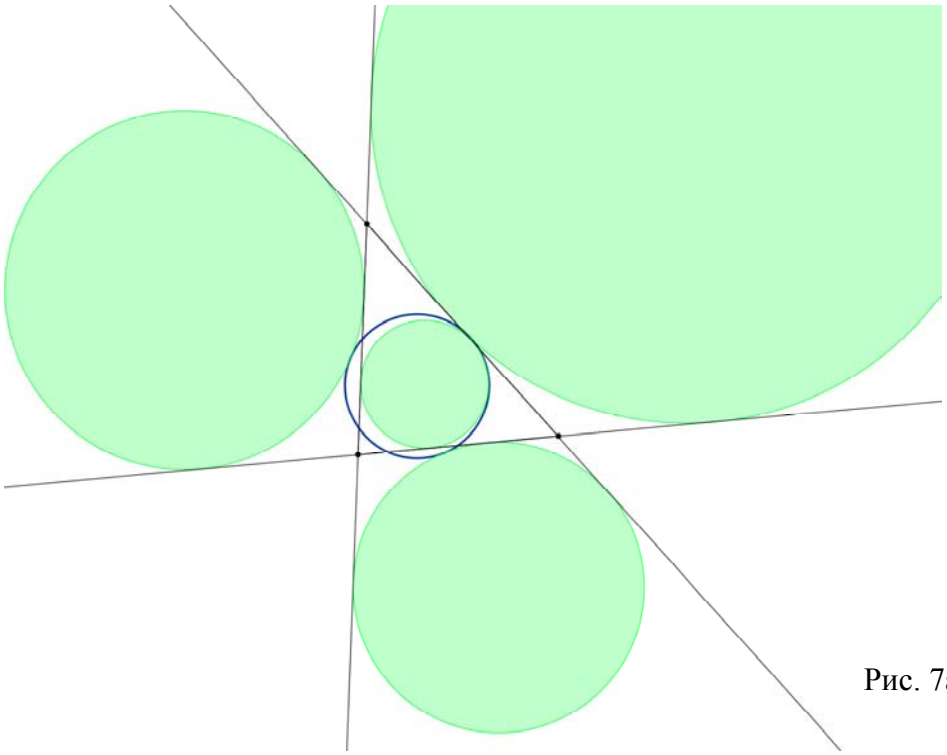


Рис. 7а

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник, A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно, A_2, B_2, C_2 – основания высот, опущенных из вершин A, B и C. Докажем, что вписанная и вневписанная окружности ΔABC, касающиеся стороны AC, являются окружностями Тебо для $\Delta B_1B_2A_2$ и для точки C на прямой B_1B_2, что равносильно **теореме Фейербаха.**

Пусть точка I' – точка пересечения биссектрис углов B и $A_2B_2B_1$ (см. рис. 7б). Докажем, что I' – инцентр $\Delta B_1B_2A_2$.

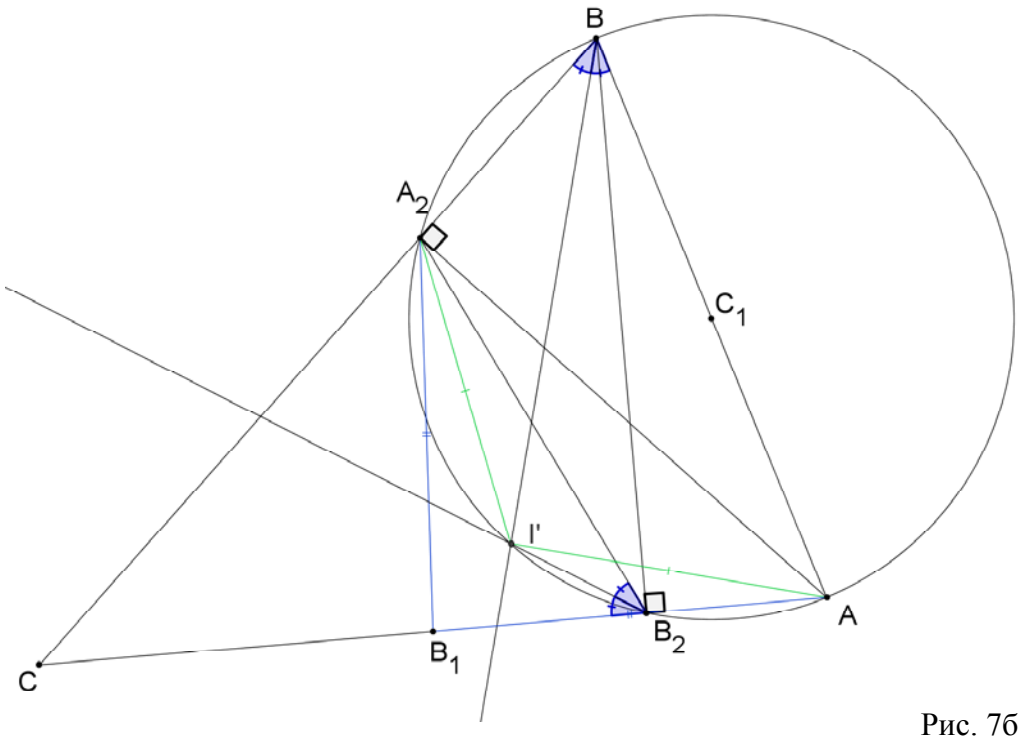


Рис. 7б

Поскольку AA_2 и BB_2 – высоты, то точки A, A_2, B, B_2 лежат на одной окружности, тогда $\angle A_2B_2B_1 = \angle CBA$. Поэтому $\frac{\angle A_2B_2B_1}{2} = \frac{\angle CBA}{2}$, таким образом, $\angle A_2B_2I' = \angle CBI'$, следовательно, точки I', A_2, B, B_2 лежат на одной окружности. Так как точки A, A_2, B, B_2 лежат на одной окружности и I', A_2, B, B_2 лежат на одной окружности, то A, I', A_2, B, B_2 лежат на одной окружности. Поскольку BI' – биссектриса угла B, то $A_2I'=I'A$. Так как ΔCA_2A – прямоугольный, то $A_2B_1=B_1A$. Следовательно, прямая B_1I' – срединный перпендикуляр к отрезку AA_2, поэтому $B_1I' \| A_2B$ и B_1I' –биссектриса угла A_2B_1A, таким образом, I' – инцентр $\Delta B_1B_2A_2$.

Теперь докажем, что биссектриса угла B и прямая B_1C_1 пересекаются в точке I' (см. рис 7в).

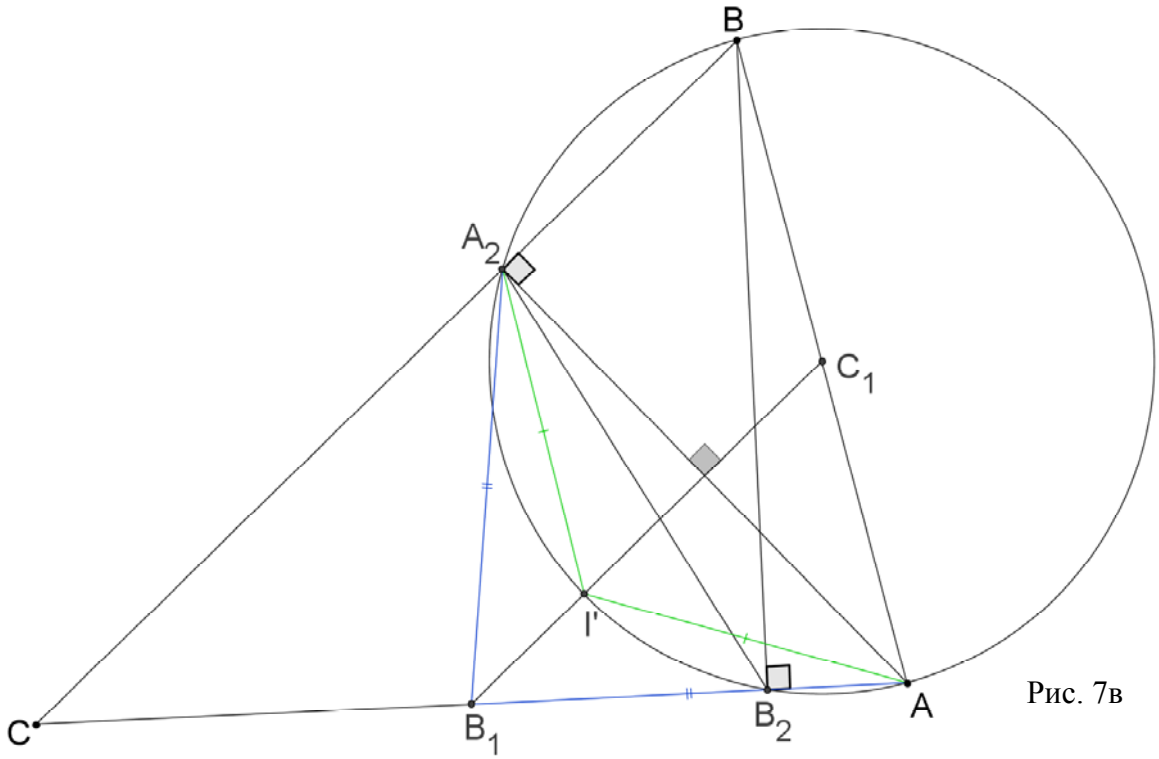


Рис. 7в

Поскольку $B_1I' \| A_2B$ и B_1I' – проходит через середину отрезка AA_2, то прямая B_1I' содержит среднюю линию ΔBA_2A, параллельную стороне A_2B. Следовательно, прямая B_1I' – проходит через середину отрезка AB, то есть через точку C_1. Таким образом, средняя линия B_1C_1 и биссектриса угла B, пересекаются в инцентре $\Delta B_1B_2A_2$.

Тогда по **лемме 4**, прямые, содержащие точки касания вписанной и вневписанной окружности с прямыми CA и CB проходят через инцентр $\Delta B_1B_2A_2$ (см. рис. 7г). Следовательно, вписанная и вневписанная окружности ΔABC, касающиеся стороны AC, являются окружностями Тебо для $\Delta B_1B_2A_2$ (см. рис. 5г).

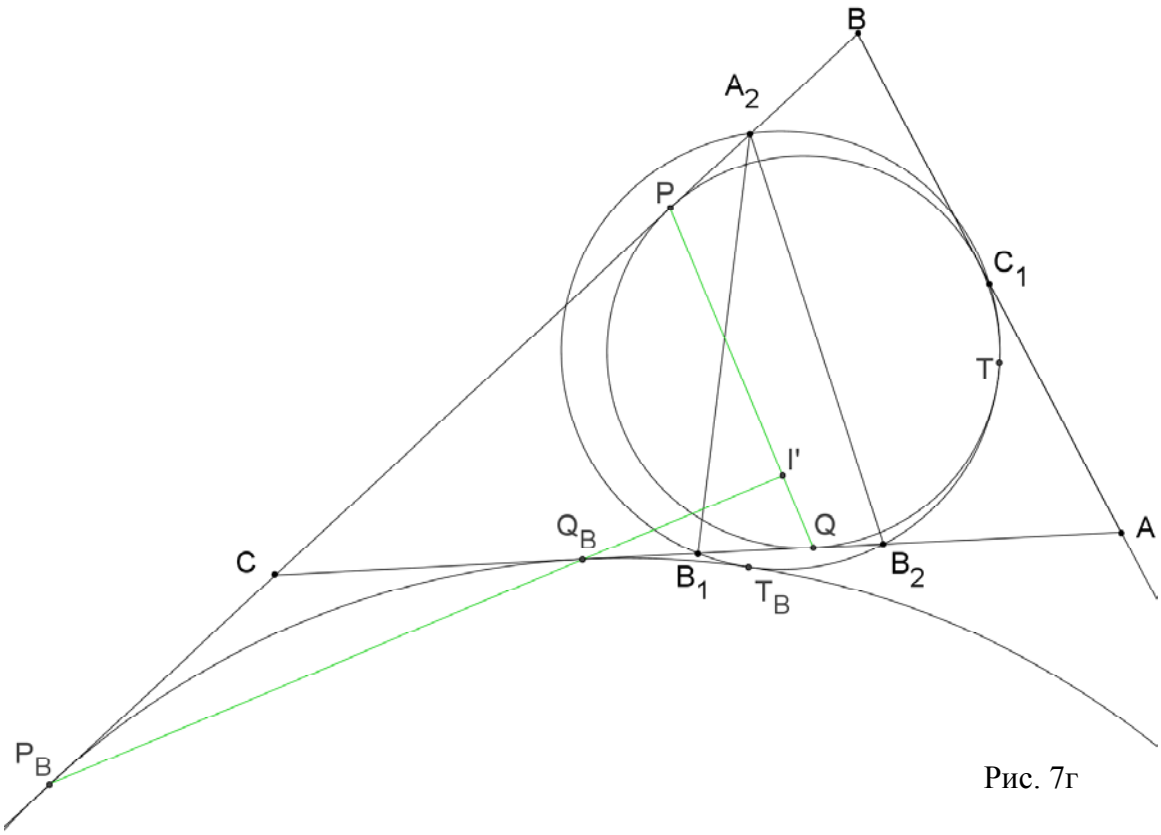


Рис. 7г

Часть III. Задачи

Задача 1. В угол с вершиной C вписана окружность. Рассмотрим всевозможные треугольники ABC с вершинами на сторонах угла, описанные вокруг данной окружности. Докажите, что описанные окружности таких треугольников касаются фиксированной окружности.

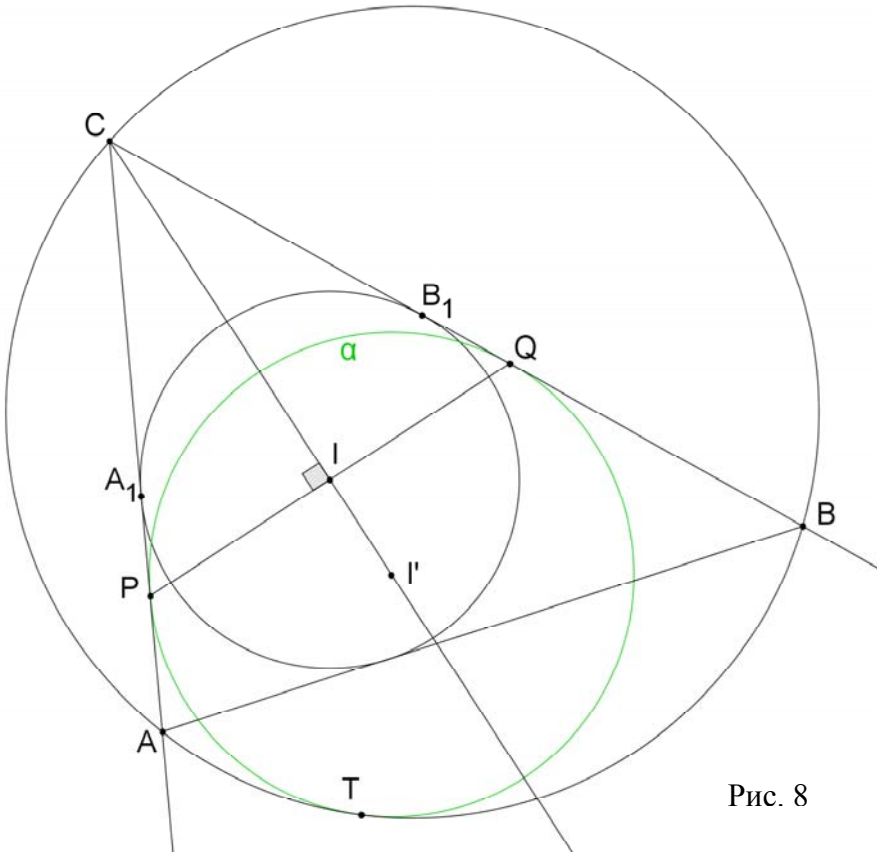


Рис. 8

Доказательство. Пусть A_1 и B_1 – точки касания вписанной окружности со сторонами угла C, I – ее центр. Кроме того, точки P и Q – точки пересечения прямой перпендикулярной CI и со сторонами угла C (см. рис. 8). Пусть α – окружность, касающаяся угла C в точках P и Q. Тогда по **центральной теореме** окружность α касается описанной окружности треугольника ABC. Поскольку α – фиксированная окружность, то она искомая.

Комментарий. В данной задаче речь идет о частном случае окружности Тебо, когда точка M (см. формулировку центральной теоремы) на стороне треугольника совпадает с его вершиной.

Задача 2. Докажите, что в произвольной трапеции $ABCD$ окружность α, касающаяся ее оснований AB и CD и дуги BC описанной окружности ΔABC, касается также и вписанной окружности этого треугольника.

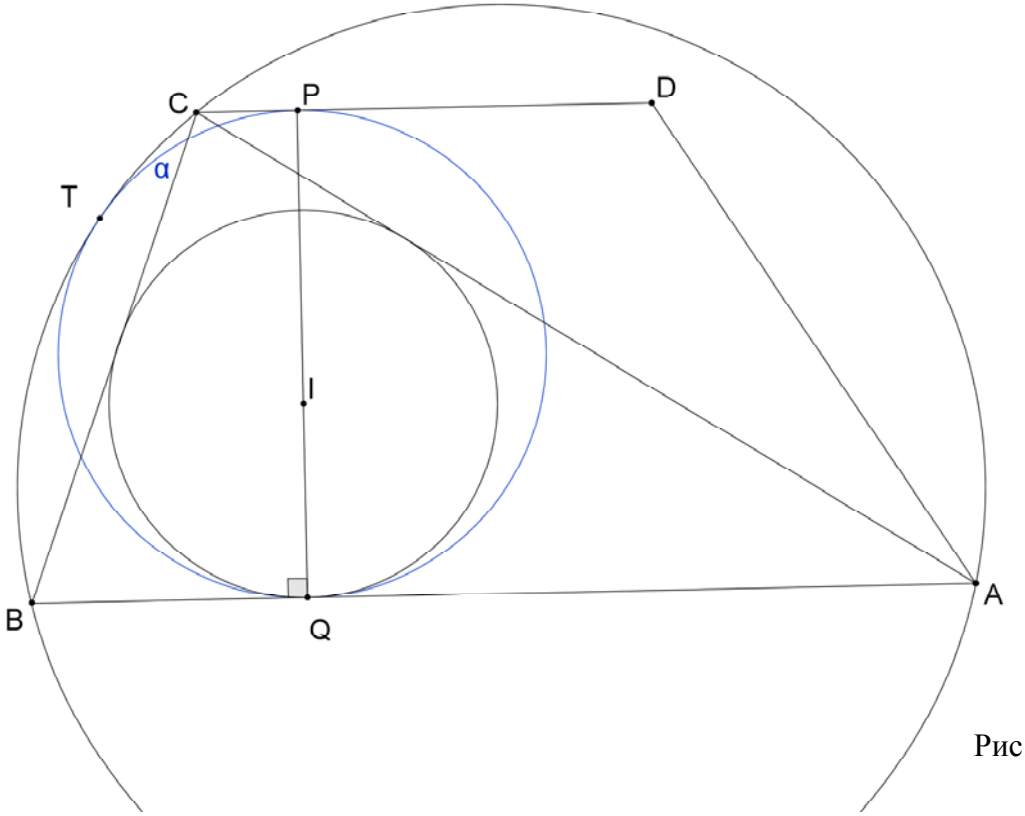


Рис. 9

Доказательство. Пусть точки P и Q – точки касания α с прямыми CD и BA соответственно(см. рис. 9). Поскольку $CD||AB$, то центр окружности α лежит на середине отрезка PQ, исходя из этого $PQ \perp BA$. Пусть I – центр окружности, вписанной в ΔABC. Тогда по **центральной теореме** точка I лежит на прямой PQ. Поскольку $PQ \perp BA$, то Q – точка касания вписанной окружности ΔABC с прямой BA. Окружность, вписанная в ΔABC, и окружность α касаются прямой BA в одной точке, следовательно, эти окружности касаются.

Комментарий. В данной задаче речь идет о частном случае окружности Тебо, когда прямая AM (см. формулировку центральной теоремы) параллельна стороне треугольника.

Задача 3. В окружность вписан четырехугольник *ABCD*. Докажите, что четыре точки: центры вписанных окружностей I_1, I_2 треугольников *ABD* и *ACD*, центры вневписанных окружностей I_3, I_4 треугольников *ABC* и *BCD*, соответствующие вершине *C* и *B* соответственно, лежат на одной прямой.

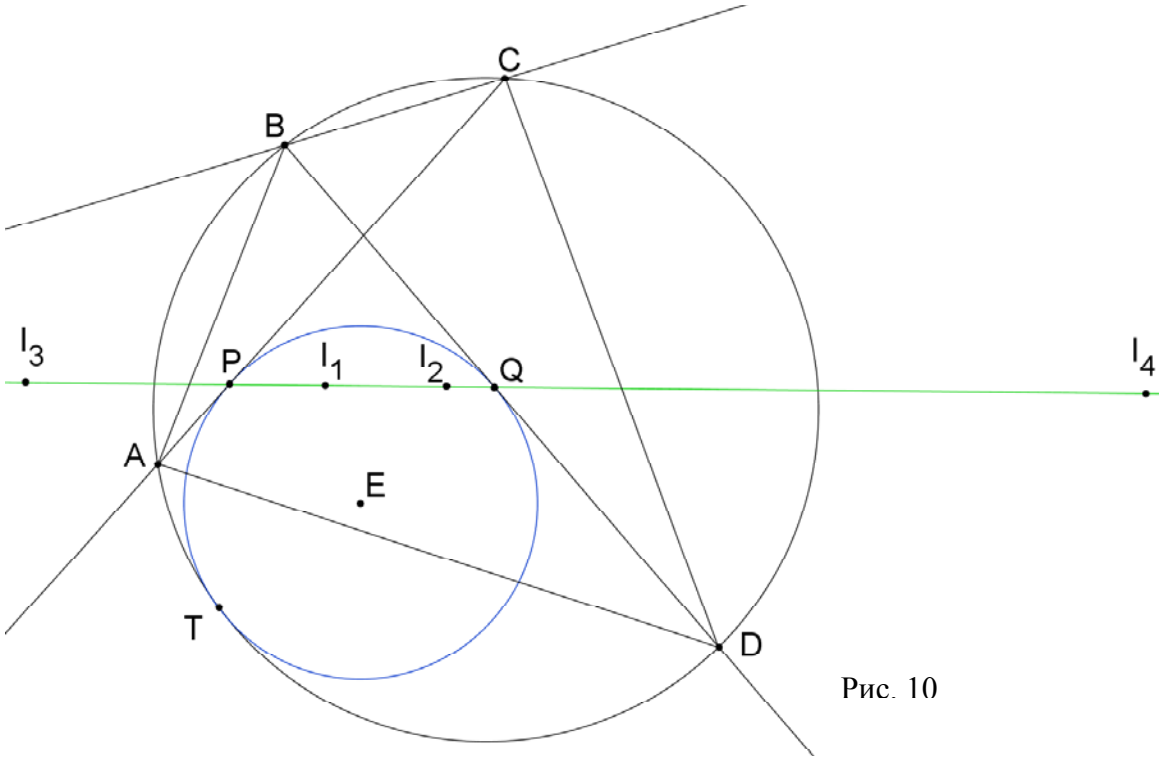


Рис. 10

Доказательство. Рассмотрим окружность α, касающуюся исходной окружности в точке *T* и отрезков *AC* и *BD* в точках *P*, *Q* (см. рис. 10). Заметим, что α – окружность Тебо для ΔABD (касающаяся прямой *AC*). Следовательно, по **центральной теореме** точки *P*, I_1, *Q* лежат на одной прямой. Аналогично точки *P*, I_2, *Q*; *P*, I_3, *Q* и *P*, I_4, *Q* лежат на одной прямой, таким образом, точки *P*, I_1, I_2, I_3, I_4, *Q* лежат на одной прямой.

В задачах 4-5 обозначения такие же, как и в теореме Тебо.

Задача 4. К окружностям Тебо проводится общая внешняя касательная, отличная от BC. Она пересекает отрезок AM в точке K. Докажите, что

А) проекция K на линию центров окружностей Тебо совпадает с точкой I (см. рис. 11а).

Б) прямая, параллельная BC и проходящая через K, касается вписанной окружности треугольника ABC.

В) $\dfrac{O_1I}{O_2I} = tg^2\dfrac{1}{2}\angle AMB$.

Г) Докажите, что окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда M – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.

Доказательство. А) Докажем, что треугольники Q_2IQ_1 и O_2KO_1 подобны.

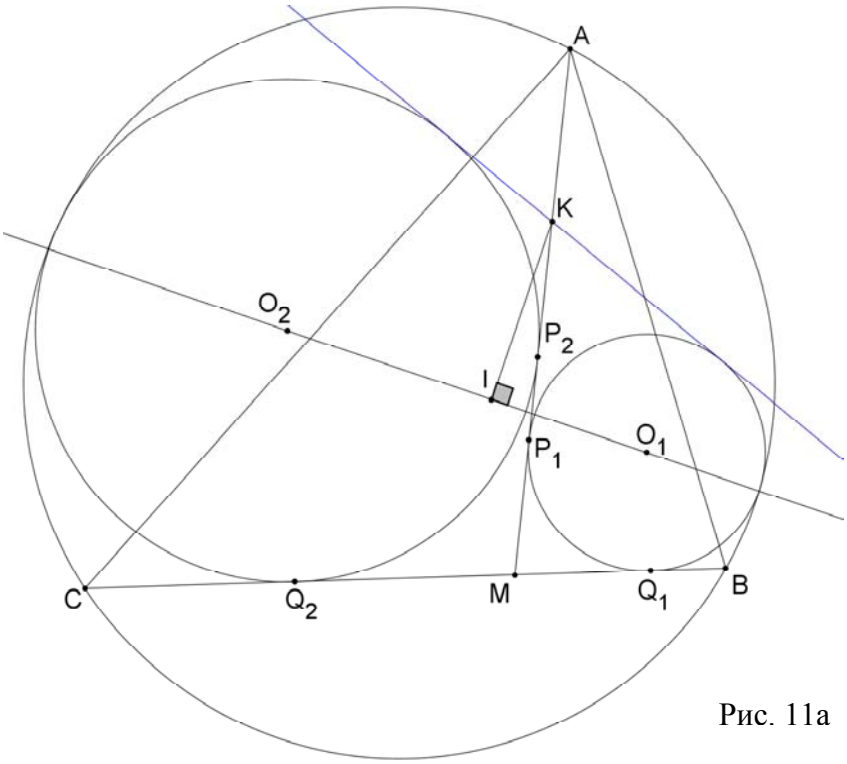


Рис. 11а

Пусть F_1, F_2 – точки касания окружностей Тебо с их общей касательной, проходящей через точку K; E – пересечение прямых F_1F_2 и Q_1Q_2 (см. рис. 11б). Поскольку окружности Тебо являются вписанной и вневписанной окружностью для ΔMKE, то прямая EO_1 – биссектриса $\angle KEM$, KO_1 – биссектриса $\angle MKE$. MO_1 – биссектриса $\angle KME$, KO_2 – биссектриса $\angle F_2KM$, а MO_2 – биссектриса $\angle Q_2MK$. Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $\angle O_1KO_2 = 90°$ и $\angle O_1MO_2 = 90°$. Поскольку отрезки касательных равны, то MQ_2=MP_2 и MP_1=MQ_1, следовательно, $MO_2 \perp Q_2P_2$ и $MO_1 \perp Q_1P_1$. Так как $\angle O_1MO_2 = 90°$, то $\angle Q_1IQ_2 = 90°$. Таким образом $Q_2P_2 \| MO_1$, а поскольку MO_1 – биссектриса $\angle KME$, то $\angle IQ_2Q_1 = \angle KMO_1$. По теореме о трилистнике точки M, O_2, K, O_1 – лежат на одной окружности, следовательно $\angle KO_2O_1 = \angle KMO_1 = \angle IQ_2Q_1$. Таким образом, $\Delta IQ_2Q_1 \sim \Delta KO_2O_1$.

Пусть точка H – проекция точки I на прямую Q_1Q_2. Докажем, что прямые KI и EI перпендикулярны.

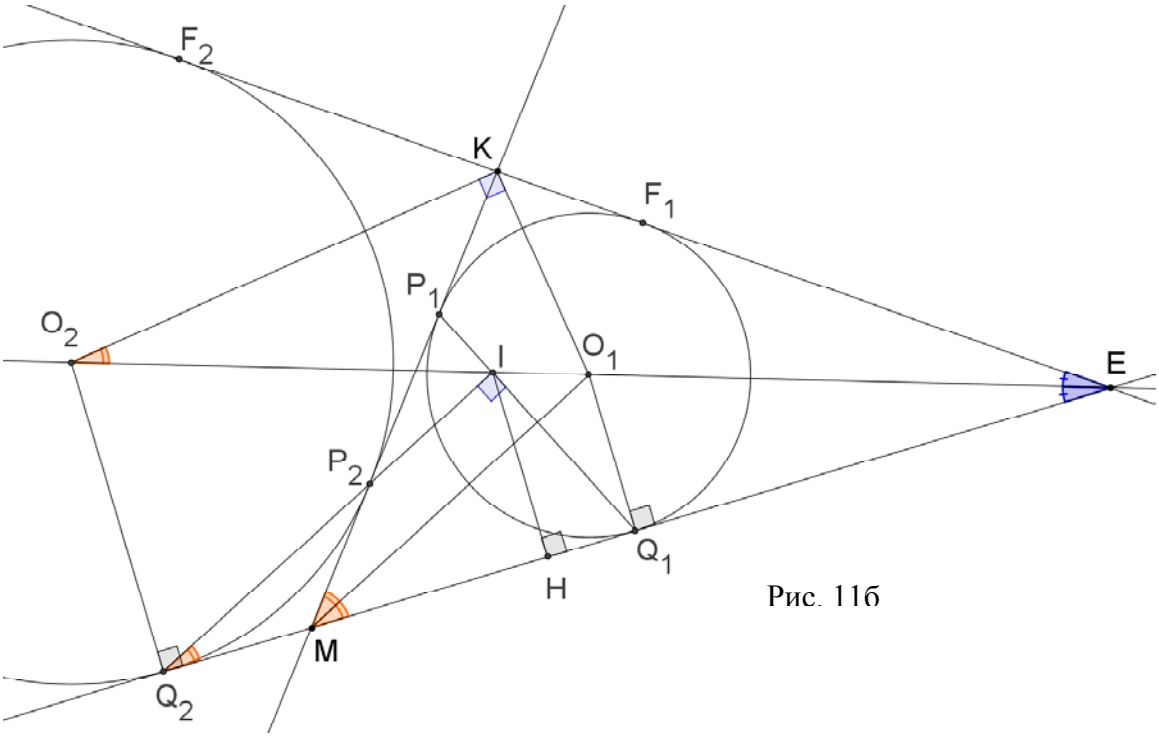


Рис. 11б

Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке E, на $-\angle O_2EQ_2$ с коэффициентом $\frac{1}{\cos\angle O_2EQ_2}$. Тогда точка Q_1 перейдет в точку O_1, точка Q_2 – в O_2, точка H – в I. Так как $\Delta IQ_2Q_1 \sim \Delta KO_2O_1$ и прямая EI перейдет в прямую EK, то точка I перейдет в K. Тогда $KI \perp EI$, поскольку $HI \perp HE$. Следовательно, проекция точки K на линию центров окружностей Тебо совпадает с точкой I.

В случае, когда прямые Q_1Q_2 и F_1F_2 параллельны, вместо поворотной гомотетии будем рассматривать параллельный перенос.

Б) Проведем через точку K прямую параллельную прямой BC. Пусть точка X – проекция точки I на эту прямую (см. рис. 11в). Докажем, что прямая KI – биссектриса угла XKE.

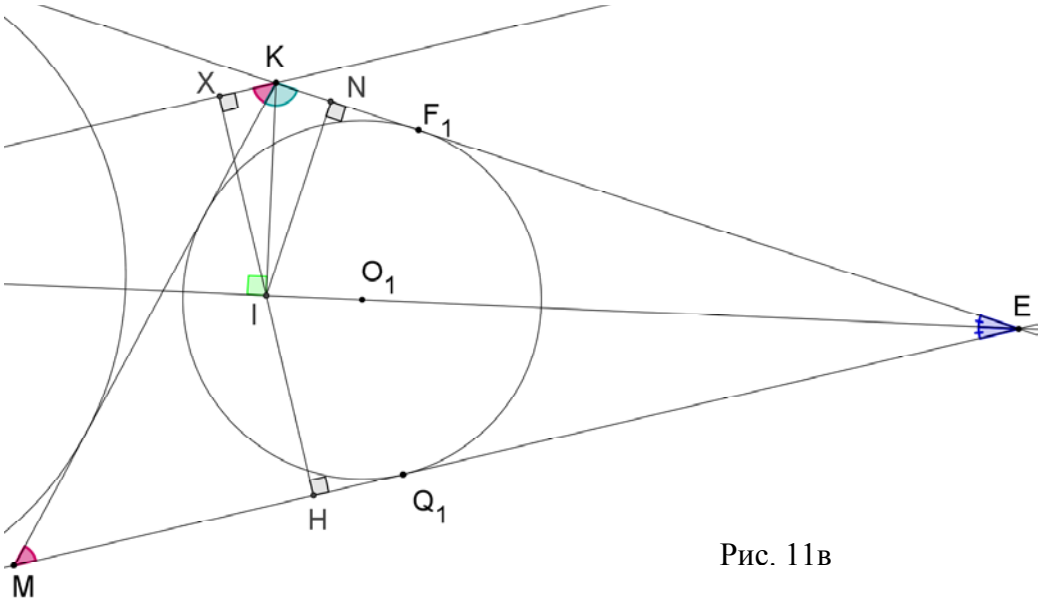


Рис. 11в

Пусть N – проекция точки I на прямую EK, $\angle KME = 2\alpha$, а $\angle MKE = 2\beta$. Так как EI – биссектриса угла KEM, то $IH=IN$ и $\angle IEK = 90° - \alpha - \beta$. Так как $XK \| ME$, то $\angle XKM = 2\alpha$. Тогда $\angle XKE = 2(\alpha + \beta)$. Поскольку $\angle IEK = 90° - \alpha - \beta$ и $KI \perp EI$, то $\angle IKE = \alpha + \beta$, следовательно, KI – биссектриса угла XKN.

Так как KI – биссектриса $\angle XKN$, то $IX = IN$. Таким образом, $IX = IH$, следовательно, прямая, параллельная BC и проходящая через K, касается вписанной окружности треугольника ABC.

В) В пункте А) было доказано, что $\angle KO_2O_1 = \angle IQ_2Q_1 = \angle KMO_1 = \frac{1}{2}\angle AMB$. Так как KI – высота в прямоугольном ΔKO_2O_1, то $\angle IKO_1 = \angle KO_2I = \frac{1}{2}\angle AMB$. Таким образом $tg\frac{1}{2}\angle AMB = \frac{KI}{O_2I} = \frac{O_1I}{KI}$, что равносильно равенству $\frac{O_1I}{O_2I} = tg^2\frac{1}{2}\angle AMB$.

Г) Пусть общая внешняя касательная окружностей Тебо, отличная от BC, пересекает прямые AC и AB в точках C_1 и B_1 соответственно (см. рис. 11г).

Докажем, что если окружности Тебо равны, то M – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.

Рассмотрим гомотетию, переводящую вписанную окружность ΔABC в вневписанную, соответствующую вершине A. Поскольку вписанная окружность ΔABC является вневписанной окружностью ΔAB_1C_1, то точки B_1 и C_1 перейдут в точки B и C соответственно. Следовательно, точка K перейдет в точку пересечения прямых BC и AK, то есть в точку M. Так как K – точка касания вневписанной окружности треугольника AB_1C_1, то и M – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.

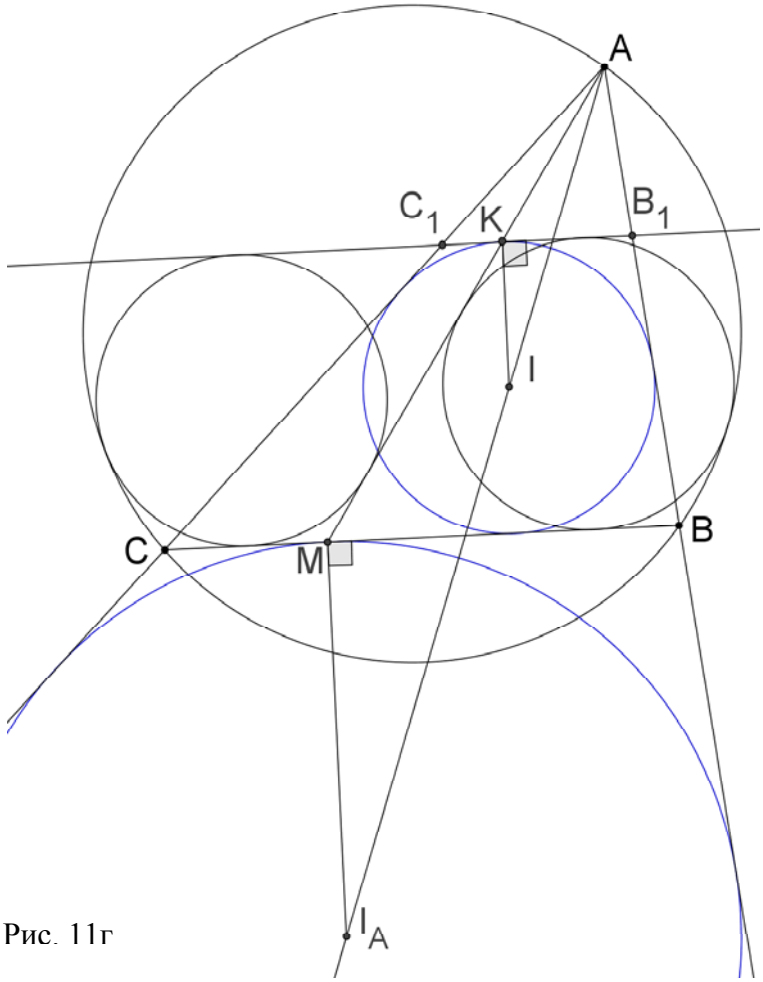


Рис. 11г

Доказательство в другую сторону проводится в обратном порядке.

Задача 5. Докажите, что если AM – биссектриса треугольника ABC, то окружности Тебо касаются, и точка их касания – центр вписанный окружности ABC.

Доказательство. Пусть P_1 и P_2 – точки касания окружностей Тебо с центрами O_1 и O_2 соответственно (см. рис. 12). По **центральной теореме**, точки Q_1, P_1, I и Q_2, P_2, I лежат на одной прямой. Окружности Тебо касаются биссектрисы угла A, следовательно, точки I, P_1, P_2 совпадают. Таким образом, окружности Тебо касаются в точке I.

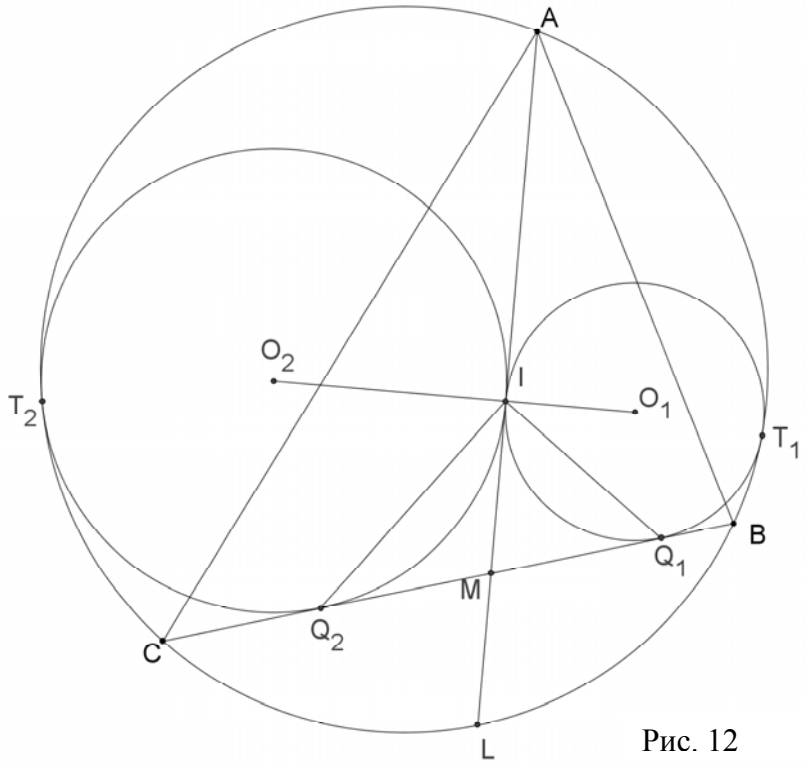


Рис. 12

Рассмотрим еще несколько задач, связанных с касающимися окружностями.

Задача 6. На плоскости даны прямые a и b, а также окружность w, касающаяся b. Рассмотрим семейство всевозможных треугольников ABC, описанных около w, у которых вершина A лежит на прямой a, а вершины B и C – на b. Докажите, что описанные окружности этих треугольников касаются двух фиксированных окружностей.

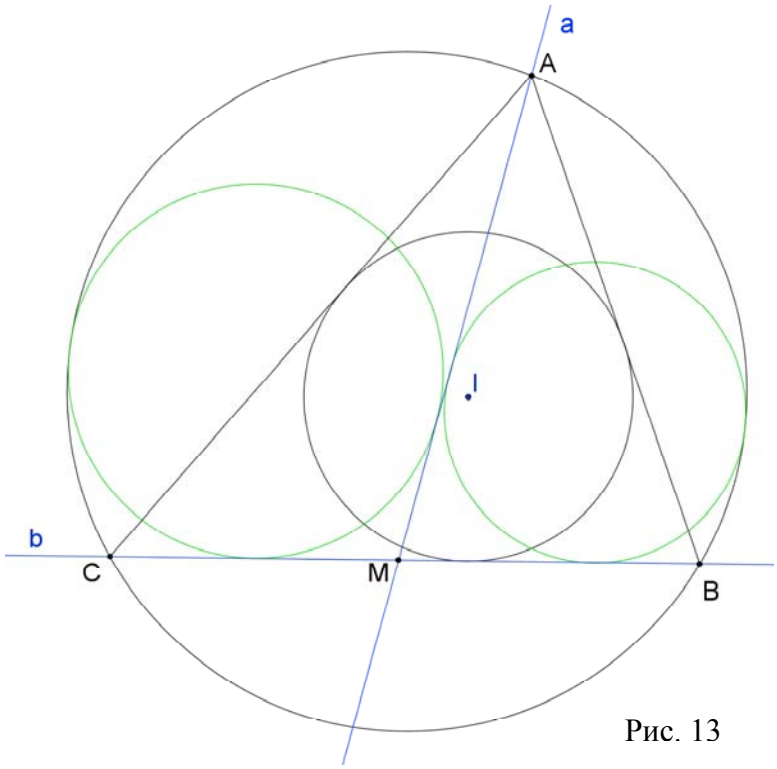


Рис. 13

Доказательство. Пусть M – точка пересечения прямых a и b, I – центр вписанной окружности ABC (см. рис. 13). Поскольку прямые a, b и точка I фиксированы, то из построения следует, что окружности Тебо для всех треугольников ABC совпадают. Следовательно, описанные окружности этих треугольников касаются фиксированных окружностей Тебо.

Задача 7. На плоскости даны окружности w_1 и w_2. Произвольная окружность, касающаяся и содержащая их, пересекает их общую внешнюю касательную в точках B и C, а общую внутреннюю касательную – в точке A, которая лежит в той же полуплоскости относительно прямой BC, что и окружности w_1 и w_2. Докажите, что треугольник ABC имеет фиксированную вписанную окружность.

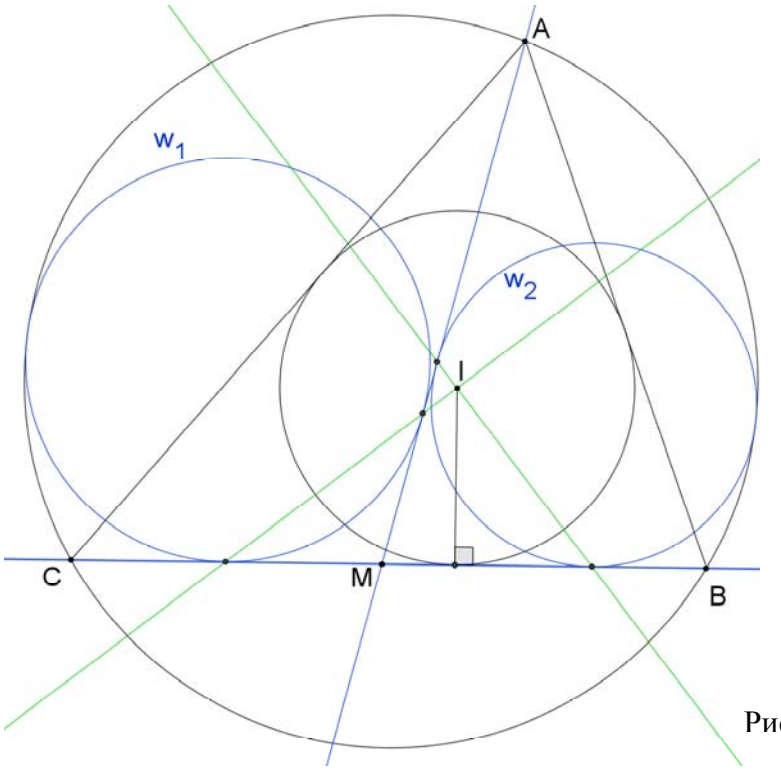


Рис. 14

Доказательство. Пусть M – точка пересечения общих касательных (см. рис. 14). Окружности w_1 и w_2 являются окружностями Тебо для треугольника ABC. Точки касания окружностей Тебо с прямыми BC и AM фиксированы, следовательно, по **центральной теореме** инцентры I всех таких треугольников ABC совпадают. Так как расстояние от прямой BC до I задано, то окружность, вписанная в треугольник ABC, фиксирована.

Задача 8. На плоскости дана точка K, окружность α с центром в точке O и точка A на этой окружности. Через K проводится произвольная прямая, пересекающая окружность α в точках B и C. Докажите, что окружность девяти точек с центром в точке E треугольника ABC касается двух фиксированных окружностей.

Доказательство. Пусть M_A, M_B, M_C – середины сторон BC, AC, AB соответственно, а M – центр пересечения медиан (см. рис. 15а). Докажем, что ГМТ точки E – окружность. Для этого найдем ГМТ M_A и M.

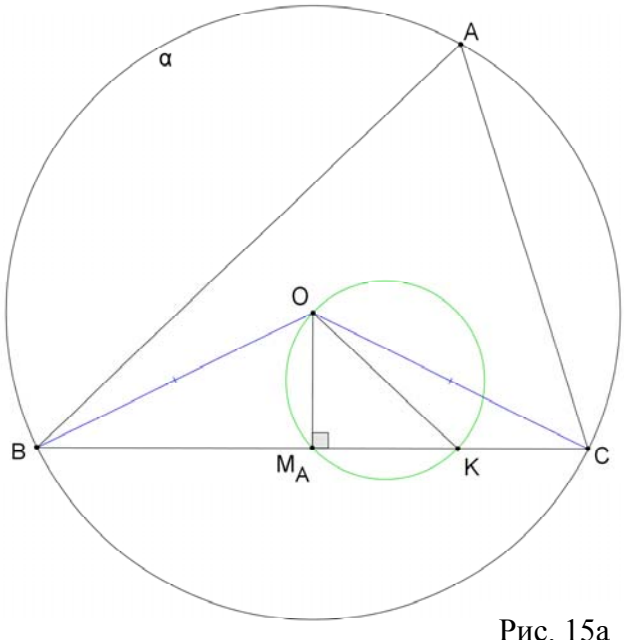


Рис. 15а

Поскольку M_A – середина отрезка BC, а O – центр окружности α, то $\angle OM_AK = 90°$. Таким образом, ГМТ M_A – окружность, построенная на отрезке OK как на диаметре.

При гомотетии с центром в точке A и коэфициентом $\frac{2}{3}$ точка M_A перейдет в точку M. Таким образом, геометрическое место точек M также окружность (см. рис. 15б).

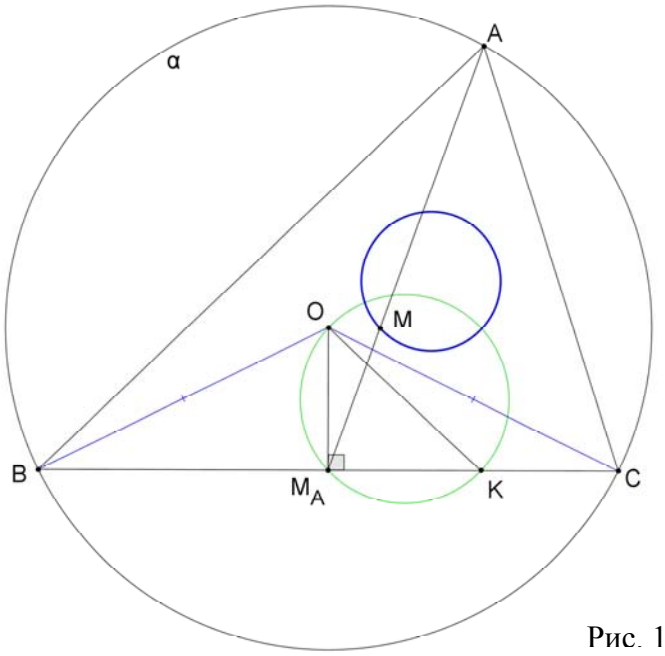


Рис. 15б

Поскольку точки O, E, M лежат на прямой Эйлера треугольника ABC, то при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $\frac{3}{2}$ точка M перейдет в точку E. Следовательно, ГМТ E – окружность (см. рис. 15в). Пусть радиус этой окружности равен r, а ее центр – точка F. Так как радиус окружности девяти точек равен половине радиуса описанной окружности треугольника, то радиус окружности девяти точек треугольника ABC фиксирован и равен половине радиуса окружности α.

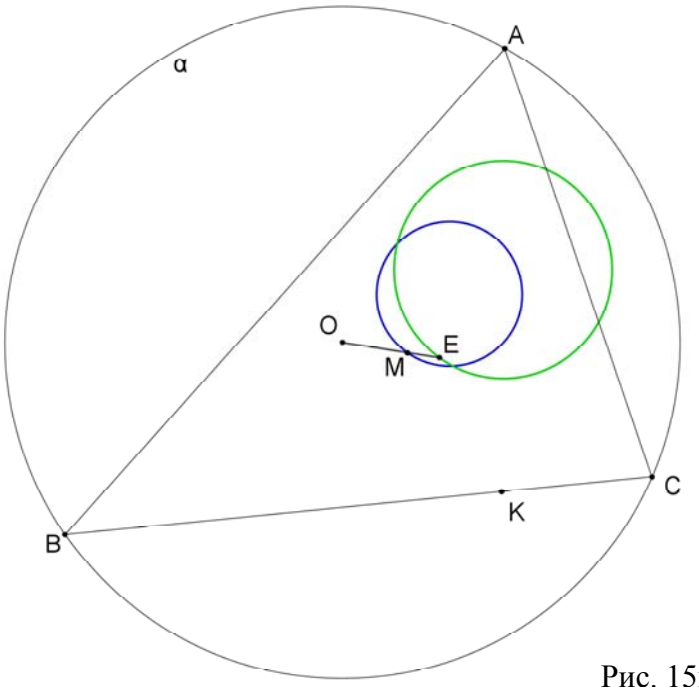


Рис. 15в

Пусть радиус окружности девяти точек равен R. Тогда окружность девяти точек касается двух фиксированных концентрических окружностей с центром в точке F и радиусами $R+r$ и $|R-r|$.

Заключение

Задачи, в которых речь идет о касающихся окружностях, обычно очень сложны. В то же время знание центральной теоремы дает нам мощный инструмент для их решения. Например, решение задач 2 и 3 без знания центральной теоремы весьма затруднительно.

Дальнейшее исследование может быть связанно с изучением различных частных случаев центральной теоремы или с рассмотрением свойств точек касания (точки Фейербаха). Приведем несколько ссылок. Частному случаю центральной теоремы, когда точка M совпадает с вершиной треугольника, посвящена статья А. Гирича, журнал "Квант", 1990 год, №11 (http://kvant.mccme.ru/1990/11/neskolko_zadach_o_treugolnikah.htm).

О различных свойствах точек Фейербаха идет речь в статьях:

1) Е.Д. Куланин, "Об одном свойстве точек Фейербаха и Тебо", сборник "Учим математике-2", 2009 год;

2) Л.А.Емельянов, Т.Л.Емельянова, "Семейство Фейербаха", сборник "Математическое просвещение", выпуск 6 (http://www.mccme.ru/free-books/matpros7.html).

3) Е. Д. Куланин, "Виктор Тебо и его задачи (к 125-летию со дня рождения В. Тебо (1882–1960))", сборник "Математическое просвещение", выпуск 11 (http://www.mccme.ru/free-books/matprosc.html).

Список литературы

1. В. Ю. Протасов, "Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха", журнал "Квант", 2008 год, №4 (http://kvant.mccme.ru/pdf/2008/2008-04.pdf).

2. Я. П. Понарин, "Элементарная геометрия", МЦНМО, 2004.

3. А. В. Акопян, "Геометрия в картинках", Москва, 2011.

4. Е. Д. Куланин, “Виктор Тебо и его задачи”, Матем. просв., сер. 3 (2007), 11.