Неравенство Йенсена и выпуклые функции

А.Н. Лепес
РСФМСШИ им.О.А.Жаутыкова, adilsultan01@gmail.com

В книге [1] на странице 218 имеется доказательство неравенства:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 4abc - 1, \qquad (1)$$

где *a, b, c* – действительные числа. Это доказательство можно записать в одну строчку:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 4abc + 1 = (a^2 - 1)^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2(bc - a)^2 \geq 0.$$

Интересно только, как догадаться до подобного самостоятельно? Универсального способа нахождения таких представлений, к сожалению, нет. А может можно доказать подобные неравенства как-нибудь по-другому? Ниже представлен еще один способов доказательства указанного неравенства.

Доказательство (*Лепес А.*). Рассмотрим функцию $f(x) = x^4$, где $x \in R$. Решим предварительно следующую задачу среди функций вида $g(x) = kx^3 + m$ найти такую, что $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$ и $f(x) \geq g(x)$, где x – любое действительное число. Отсюда, числа k и m должны удовлетворять следующим равенствам $k + m = 1$, $4 = 3k$. Следовательно, $k = \frac{4}{3}$, $m = -\frac{1}{3}$. Осталось убедиться в том, что $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in R$. Последнее верно, поскольку неравенство $x^4 \geq \frac{4x^3 - 1}{3}$ (см. рис.1) эквивалентно неравенству $(x-1)^2\left(3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right) \geq 0$, которое, очевидно верно для всякого числа x. Отсюда, в силу неравенства Коши $|a|^3 + |b|^3 + |c|^3 \geq 3|abc|$ и неравенства $|t| \geq t$ имеем

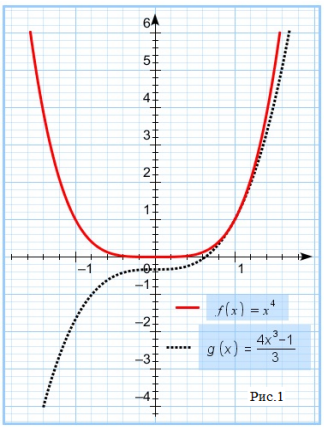


Рис.1

$$a^4 + b^4 + c^4 = |a|^4 + |b|^4 + |c|^4 \geq \frac{4(|a|^3 + |b|^3 + |c|^3)}{3} - 1 \geq 4|abc| - 1 \geq 4abc - 1.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

Лучше или нет представленное доказательство? С одной стороны, оно существенно длиннее, с другой стороны, оказывается, что подобным способом можно доказывать и другие неравенства, при этом необходимо проводить анализ функции, участвующей в неравенстве, а не изобретать нестандартные преобразования. Например, на Балтийской математической олимпиаде в 2011 году была следующая задача: докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}, \qquad (2)$$

где *a, b, c, d* – положительные числа, сумма которых равна 4.

На официальной странице Балтийской олимпиады (см.[2]) имеется доказательство неравенства (2), которое вкратце можно записать следующим образом:

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}=$$

$$=\frac{a}{a^3+1+1+6}+\frac{b}{b^3+1+1+6}+\frac{c}{c^3+1+1+6}+\frac{d}{d^3+1+1+6}\le [AM-GM]\le$$

$$\le\frac{a}{3a+6}+\frac{b}{3b+6}+\frac{c}{3c+6}+\frac{d}{3d+6}=\frac{4-2\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right)}{3}\le$$

$$\le [AM-HM]\le\frac{4-2\cdot\frac{16}{a+2+b+2+c+2+d+2}}{3}=\frac{4}{9}.$$

Здесь мы использовали стандартные обозначения:

AM-GM – неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим нескольких чисел;
AM-HM – неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим нескольких чисел;

Опять же возникают вопросы: сложно ли самостоятельно догадаться до указанного решения и можно ли доказать это неравенство без искусственных приемов типа 8=1+1+6? В качестве ответа на первый вопрос можно отметить, что Балтийская олимпиада является командным соревнованием, на котором участвуют сборные таких стран как Россия, Германия, Латвия, Финляндия, Швеция, Эстония и др. А в 2011 году из 11 команд указанное неравенство смогло доказать только 5 команд. Много это или мало, но подобное можно встретить и на других математических олимпиадах. Например, в 2012 году на Международной математической олимпиаде соответствующее неравенство смогли доказать только 189 участников из 548. Основная причина низкого процента учащихся, на наш взгляд, кроется в том, что знание классических неравенств не достаточно для их эффективного применения, в некоторых ситуациях необходимо проявить творчество. Поэтому, естественно, возникает желание разработать метод доказательства неравенств хотя бы для некоторого типа, в котором творческая составляющая сведена к минимума. Конечно, для разработки метода необходима некоторая теоретическая составляющая. Именно она и представлена в настоящем проекте. На основании этих исследований нами разработан новый метод доказательства неравенств: метод отделяющих касательных, описание которого и различные применения приняты в печать в четыре журнала:

1) г. Чебоксары, Россия

Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Об одном методе доказательства неравенств // Труды XXI конференции «Математика. Образование». 2013. 16 стр. (в печати, октябрь-ноябрь 2013);

2) г. София, Болгария

Ibatulin I.Zh., Lepes A.N. Application of the method of separating tangents to prove inequalities // Didactical Modeling: e-journal 2013. URL: http://www.math.bas.bg/omi/DidMod/index.htm. 13 pages (в печати, 2014);

3) г. Гонконг, Китай

Ibatulin I.Zh., Lepes A.N. Using tangent lines to prove inequalities (part II) // Mathematical Excalibur. 2013-2014. V.1. 6 pages. (в печати, январь-февраль 2014);

4) г. Москва, Россия

Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Применение касательной для доказательства неравенств // Математика в школе. 2014. 13 стр. (в печати, январь-февраль 2014).

Читателям предлагается попробовать доказать следующие неравенства, тем самым для себя оценить практическую значимость метода отделяющих касательных.

Пример 1. ([3], стр. 31, упр. 1.2.9) Пусть даны положительные числа *a, b, c* такие, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство $\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geq 1$.

Пример 2. ([3], стр. 55, упр. 3.1.4) Пусть даны неотрицательные числа *a, b, c, d, e* такие, что

$$\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}=1.$$

Докажите, что

$$\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}\leq 1.$$

Пример 3. (Китай, 2005, [1], стр. 196, задача 132) Пусть даны положительные числа *a, b, c*, сумма которых равна 1. Докажите неравенство

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geq 1.$$

Пример 4. ([1], стр. 196, задача 124) Пусть даны положительные числа *a, b, c* такие, что $a^2+b^2+c^2=12$. Найдите наибольшее значение выражения

$$A=a\cdot\sqrt[3]{b^2+c^2}+b\cdot\sqrt[3]{c^2+a^2}+c\cdot\sqrt[3]{a^2+b^2}.$$

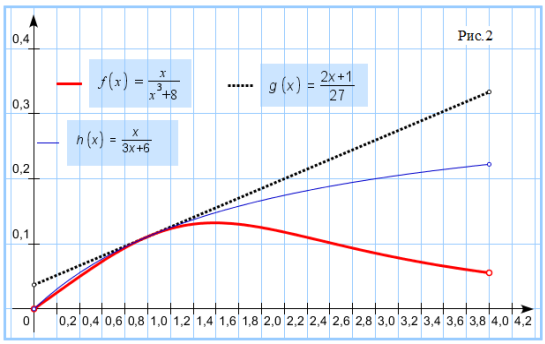
Пример 5. (Baltic Way, 2002, задача 4, [4]) Путь дано целое положительное число *n*. Для любых чисел $x_1, x_2, \dots, x_n\geq 0$ таких, что $\sum_{k=1}^{n}x_k=1$, докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}x_k(1-x_k)^2\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

Ниже представлены решения примеров 1-5 после тех утверждений, которые применяются для их создания. Однако необходимо подчеркнуть, что не всегда применение теоремы буквально, в некоторых случаях оно может быть косвенным. Например, лемма 1 не дает формулы для нахождения локальной опорной кривой, но в лемме 1 есть условия на такие кривые, с помощью которых их можно найти, если знать тип кривой. Это можно сравнить с теоремой Ферма из дифференциального исчисления, в которой также нет формулы для точек локального экстремума, однако с помощью нее была создана схема нахождения точек локального экстремума, весьма полезная на практике в школе. С помощью леммы 2 можно облегчить доказательство неравенств между функцией и её локальной опорной кривой, что на первый взгляд может показаться не столь важным, однако без этой леммы авторам решения №1 (см.[5], стр. 71) открытой олимпиады 239 школы г.Санкт-Петербурга пришлось использовать неравенство Юнга.

В качестве еще одной демонстрации метода отделяющих касательных приведем доказательство неравенства (2).

Доказательство. Заметим, что если $a=b=c=d=1$, то $\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}=\frac{4}{9}$. Положим $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$, где $x\in(0;4)$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=1$:



$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(x-1)=\frac{2x+1}{27}.$$

Покажем, что на интервале (0; 4) график функции f лежит не выше касательной прямой $y=\frac{2x+1}{27}$ (см. рис. 1). Действительно, поскольку

$$\frac{x}{x^3+8}\le\frac{2x+1}{27}\Leftrightarrow(x-1)^2(2x^2+5x+8)\ge 0, \qquad (3)$$

то указанное утверждение верно. Применяя неравенство (3), получим

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\le\frac{2(a+b+c+d)+4}{27}=\frac{4}{9}.$$

Тем самым, неравенство (2) доказано.

Справедливости ради, необходимо отметить, что доказательства неравенств с помощью касательной прямой можно найти у некоторых авторов (см., например, [1], [3], [6]). Однако это только отдельные доказательства без теоретических исследований. Что же особенного есть у касательной прямой и можно ли это как-то обобщить, чтобы оказалось полезно для доказательства неравенств с несколькими переменными?

Отметим, что в школьной программе математики есть определение касательной прямой (см. [7], стр. 99-100), как предельное положение секущей. И всякая касательная прямая обладает одним важным свойством: если функция дважды непрерывно-дифференцируема и её вторая производная в точке x_0 отлична от нуля, то существует окрестность точки x_0, в которой график функции лежит по одну сторону от касательной прямой, проведенной в точке x_0. Это объясняется тем, что если, например, вторая производная функции в точке x_0 положительна, то в силу непрерывности второй производной существует окрестность точки x_0, в которой вторая производная положительна, это означает, что функция выпукла вниз. Следовательно, график такой функции лежит не ниже отрезка касательной в некоторой окрестности точки x_0.

В статье В.И. Гаврилова (см.[8]) показана эквивалентность двух определений выпуклых функций: одно через секущую, другое через касательную. Автор рассматривает функции, графики которых лежат по одну сторону от касательной прямой, проведенной в любой точке графика функции.

Одним из широко известных свойств выпуклых функций является то, что все они удовлетворяют неравенству Йенсена (см., например, [9]):

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}f(x_k)}{n}\ge f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}\right), \qquad (3)$$

где f – выпуклая вниз на интервале I, $x_1, x_2, \dots, x_n\in I$.

Между тем, на математических олимпиадах встречаются неравенства так или иначе связанные с неравенством Йенсена, общий вид которых можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0), \tag{4}$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\sum_{j=1}^{n} l(x_j) = n \cdot l(x_0)$.

В дальнейшем, если функция f удовлетворяет неравенству (4), то мы будем говорить, что функция удовлетворяет неравенству Йенсена в точке x_0.

Практический интерес к неравенству (4) заключается в том, что на математических олимпиадах встречается множество примеров невыпуклых функций, удовлетворяющих неравенству (4). Возникает вопрос: это совпадение или существуют более общие условия на функции, обеспечивающие неравенство (4), чем выпуклость? Важность этого вопроса обусловлена тем, что отсутствие анализа в данной области может, как порождать 6 различных доказательств одного неравенства (см., например, [5], стр.71-75), так и приводить к созданию неправильной ссылки на выпуклость для функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена (см., например, [5], стр. 19).

Действительно, в книге [5] на стр. 71 имеется неравенство из открытой олимпиады 239 школы г.Санкт-Петербурга 2011 года:

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leq \frac{4}{5}, \tag{5}$$

где a, b, c, d – положительные числа, сумма которых равна 4.

Ключевым моментом в решении №1 (см.[5], стр. 71) является неравенство

$$\frac{a}{a^3+4} \leq \frac{2a+3}{25}.$$

Однако нет объяснений как было получено данное неравенство и оно доказывается с помощью неравенства Юнга. При этом, оказывается, что прямая $y = \frac{2x+3}{25}$ является касательной прямой к графику функции $f(x) = \frac{x}{x^3+4}$, где $x \in (0; 4)$, и разность $\frac{a}{a^3+4} - \frac{2a+3}{25}$ на интервале (0; 4) принимает те же знаки, что и многочлен $(a-1)^2(-2a^2-5a-8)$. То есть необходимое вспомогательное неравенство можно было доказать с помощью разложения на множители.

В решение №4 ([5], стр.73-74), которое называется «неравенство Йенсена, усиленное дубинкой», в силу того, что функция f является невыпуклой на всем интервале (0; 4), для части данного интервала применяется неравенство Йенсена, а для части некоторые рассуждения. При этом оказывается, что хотя функция и невыпуклая, неравенство Йенсена в точке $x_0=1$ для нее выполнено. То есть «усиливать» неравенство Йенсена не нужно было. Главным здесь было то, что график функции f лежит не выше касательной прямой, проведенной к нему в точке $x_0=1$.

И снова возникает вопрос: это совпадение, что точка $x_0=1$ является корнем второй кратности многочлена в числителе дроби, которая совпадает с $\frac{a}{a^3+4} - \frac{2a+3}{25}$, или это свойство разности функции и её касательной в точке x_0. На эти и другие вопросы призвана попытаться найти ответ данная работа.

Относительно неправильной ссылки (см., [6], стр. 19) на выпуклость хотелось бы подчеркнуть, что Э. Саппа указал, что функция $f(x) = 10x^3 - 9x^5$ на отрезке [0; 1] является выпуклой, и поэтому он утверждал, что она удовлетворяет неравенству Йенсена, т.е.

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 1,$$

где $a, b, c>0$ и $a+b+c=1$. Последнее неравенство может быть доказано и без неравенства Йенсена (см., например, [1], стр.297). Однако, на самом деле, функция f является невыпуклой, в этом можно убедиться хотя бы с помощью второй производной: $f''(0{,}1) = 5{,}82$, $f''(0{,}9) = -77{,}22$. Тем самым, функция f является примером невыпуклой функции, удовлетворяющей неравенству Йенсена.

Необходимо отметить, что в большинстве современной литературы, посвященной неравенству Йенсена, упоминаются только выпуклые функции. В этом можно убедиться на примере журнала Квант, см. [9]-[11]. Хотя есть и исключения, см., например, [3], стр.68-70. Данная работа призвана также восполнить имеющийся пробел, в связи с чем предлагается расширить определение касательной прямой следующим образом.

Определение 1. Пусть дана числовая функция f, определенная на некотором промежутке I. Непрерывная функция g: $I \to R$ называется локальной опорной кривой к графику f в точке $x_0 \in I$, если $f(x_0)=g(x_0)$ и существует $\delta>0$ такое, что выполнено одно из следующих условий

1) для всякого $x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$;

2) для всякого $x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$.

Заметим, что в силу вышесказанного, если функция дважды непрерывно дифференцируема и вторая производная функции f в точке x_0 отлична от 0, то касательная прямая удовлетворяет определению 1. В общем случае сложно сказать, когда касательная прямая удовлетворяет определению 1. Тем более, пример касательной прямой для функции $f_2(x) = x^3$ в точке касания $x_0=0$ показывает, касательная прямая может и не удовлетворять определению 1.

Лемма 1 (частный случай теоремы Ферма). *Пусть даны числовые функции f и g, определенные на промежутке I. Пусть также функции f и g дифференцируемы в точке $x_0 \in I$ и $f(x_0)=g(x_0)$. Если существует $\delta>0$ такое, что для всякого $x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполнено неравенство $f(x) \geq g(x)$, то $f'(x_0)=g'(x_0)$.*

Доказательство. Согласно условию теоремы имеем

$$h(x) = f(x) - g(x) \geq 0 = h(x_0), \text{ где } x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta).$$

Значит, точка x_0 является точкой локального минимума функции h. Отсюда по теореме Ферма $h'(x_0)=0$, то есть $f'(x_0)=g'(x_0)$. Что и требовалось доказать.

Практический смысл леммы 1 заключается в том, что для дифференцируемой в точке x_0 функции f локальную опорную кривую необходимо искать только среди тех функций, у которых производная в точке x_0 совпадает с $f'(x_0)$. Тем самым, лемма 1 объясняет

необходимость рекомендаций Фам Ким Хунга, которые он привел в свой книге (см. [3], стр. 136). В некоторых ситуациях это может оказаться весьма полезным.

При доказательстве неравенства (1), также как и при доказательстве неравенства (2) рассматривая разность между функцией $f(x) = x^4$, где $x \in R$, и её локальной опорной кривой $g(x) = \frac{4x^3-1}{3}$, мы получили многочлен

$$(x-1)^2\left(3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right),$$

у которого точка касания являлась корнем второй кратности. Оказывается, что по-другому и быть не могло.

Лемма 2. *Пусть даны многочлены P, Q и g, промежуток I, точка* $x_0 \in I$ *такие, что* $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, *где* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. *Пусть также для всякого* $x \in I$ *выполнено неравенство* $Q(x)>0$. *Тогда разность* $h(x) = f(x) - g(x)$ *представима в виде* $\frac{(x-x_0)^2 \cdot T(x)}{Q(x)}$, *где T - многочлен.*

Доказательство. Согласно формуле Тейлора всякий многочлен представим в следующем виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0),$$

где n – степень многочлена P, $P^{(k)}(x_0)$ – k-ая производная многочлена P *в* точке x_0. Отсюда, многочлены P, Q, g можно записать в виде

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + P_1(x)(x-x_0)^2,$$

$$Q(x) = Q(x_0) + Q'(x_0)(x-x_0) + Q_1(x)(x-x_0)^2,$$

$$g(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} + g_1(x)(x-x_0),$$

где P_1, Q_1, g_1– многочлены. Следовательно,

$$f(x) - g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} - g_1(x)(x-x_0) =$$

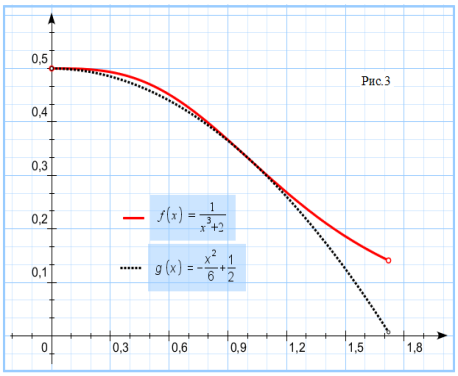
$$= \frac{(x-x_0)\left(P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0) - g_1(x)Q(x)Q(x_0) + (x-x_0)(P_1(x)Q(x_0) - P(x_0)Q_1(x_0))\right)}{Q(x)Q(x_0)}.$$

Далее из равенства $f'(x_0) = g'(x_0)$ следует, что $g_1(x) = f'(x_0) + g_2(x)(x-x_0)$, где g_2 является многочленом. Следовательно,

$$f(x)-g(x)=\frac{(x-x_0)^2\left[\left(P_1(x)Q(x_0)-P(x_0)Q_1(x)\right)-f'(x_0)Q(x_0)\left(Q'(x_0)+Q_1(x)(x-x_0)\right)-g_2(x)Q(x)Q(x_0)\right]}{Q(x)Q^2(x_0)}.$$

Что и требовалось доказать.

Решение примера 1 (*Лепес А.*). Заметим, что при $a=b=c=1$ наше неравенство обращается в равенство. Пусть $f(x)=\frac{1}{x^3+2}$, $g(x)=kx^2+m$, где $x\in\left(0;\sqrt{3}\right)$. Числа k и m выберем такими, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. То есть $k+m=\frac{1}{3}$, $2k=-\frac{1}{3}$. Следовательно, $g(x)=-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{2}$. Неравенство (см. рис. 3) $\frac{1}{x^3+2}\geq-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{2}$ является верным, поскольку оно эквивалентно неравенству $x^2(x-1)^2(x+2)\geq 0$. Отсюда,



$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geq\frac{3}{2}-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}=1.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

Интересно отметить, что расположение графика функции f не ниже локальной опорной кривой является достаточным условием для выполнения неравенства (2). Справедлива

Теорема 1 (достаточные условия выполнения неравенства Йенсена). *Пусть даны числовые функции f и l, определенные на промежутке I. Пусть также функции f и l дифференцируемы в точке $x_0\in I$. Если для каждого $x\in I$ выполнено неравенство*

$$f(x)\geq k\cdot l(x)+m,$$

где $k=\begin{cases}0,\text{если } l'(x_0)=0,\\ \frac{f'(x_0)}{l'(x_0)},\text{если } l'(x_0)\neq 0,\end{cases}$ $m=f(x_0)-k\cdot l(x_0)$, *то для функции f справедливо неравенство Йенсена в точке x_0.*

Доказательство теоремы 1 тривиально: согласно условию теоремы имеем

$$\sum_{j=1}^{n}f(x_j)\geq\sum_{j=1}^{n}\left(k\cdot l(x_j)+m\right)=k\sum_{j=1}^{n}l(x_j)+mn=n(k\cdot l(x_0)+m)=nf(x_0)$$

Замечание 1. Если $l(x)=x$ и функция f является выпуклой вниз на промежутке I, то график функции лежит по одну сторону от касательной прямой, проведенной в любой точке $x_0\in I$, то есть справедливо неравенство $f(x)\geq kx+m$, где числа k и m определены также как в условии теоремы 1. Следовательно, согласно теореме 1 для всякой выпуклой функции справедливо неравенство Йенсена. Тем самым, можно также утверждать, что неравенство Йенсена справедливо в точке x_0 для всякой функции как выпуклой, так и не выпуклой, график которой лежит по одну сторону от касательной прямой, проведенной в точке x_0.

Решение примера 2 (*Лепес А.*). Положим $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$, $g(x)=\frac{k}{4+x}+m$, где $x\geq 0$. Числа k и m выберем таким образом, что $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$. Отсюда, k=-3, m=0,8. Поскольку неравенство $\frac{x}{4+x^2}\leq\frac{4}{5}-\frac{3}{4+x}$ эквивалентно неравенству $(x-1)^2(x+1)\geq 0$, то оно является верным для всякого $x\geq 0$ (см. рис.4). Отсюда,

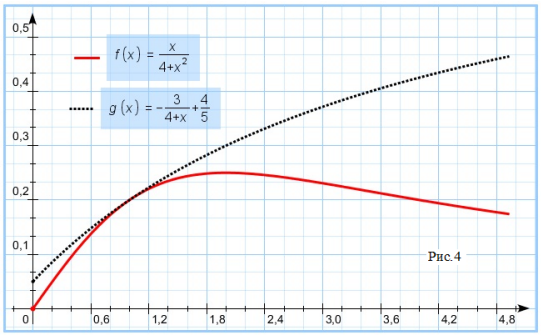


Рис.4

$$\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}\leq 4-3\left(\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}\right)=1.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 1 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 2 (достаточные условия выполнения неравенства Йенсена). *Пусть даны числовые функции f и l, определенные на промежутке I, и множество G, $x_0\in I/G$,. Пусть также функции f и l дифференцируемы в точке x_0 и на множествах G и I функция f достигает своего наименьшего значения. Если*

$$\min_G f+(n-1)\min_I f\geq nf(x_0)$$

и для каждого $x\in I/G$ выполнено неравенство

$$f(x)\geq k\cdot l(x)+m,$$

где $k=\begin{cases}0, \text{если } l'(x_0)=0,\\ \frac{f'(x_0)}{l'(x_0)}, \text{если } l'(x_0)\neq 0,\end{cases}$ $m=f(x_0)-k\cdot l(x_0)$, *то для функции f справедливо неравенство Йенсена в точке x_0.*

Доказательство. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n\in I/G$, то, рассуждая также, как и в доказательстве теоремы 1, получим, что $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\geq nf(x_0)$.

Пусть, например, x_1 не принадлежит множеству *I/G*, т.е. $x_1\in G$, тогда согласно определению наименьшего значения функции имеем

$$f(x_1)\geq \min_G f, f(x_2)\geq \min_I f, f(x_3)\geq \min_I f, \ldots, f(x_n)\geq \min_I f.$$

Складывая полученные неравенства, согласно условию теоремы получим требуемое.

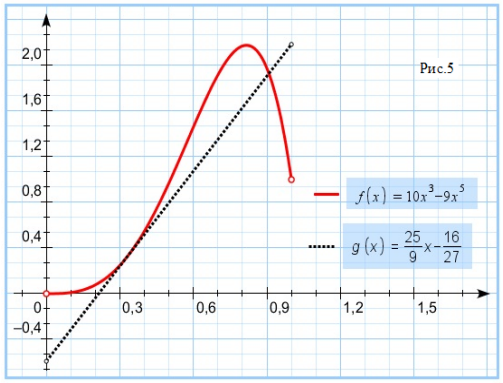
Поскольку выбор множества *G* и нахождение наименьшего значения функции требует некоторого исследования, после которых прийти к необходимым заключения не составляет особого труда, то на практике более полезным оказывается не результат теоремы 2, а ее доказательство. То есть с помощью теоремы 2 по графику функции можно прикинуть стоит ли использовать локальную опорную кривую, однако полное доказательство необходимого неравенства осуществляется также, как и доказывается теорема 2.

Решение примера 3 (*Лепес А.*). Пусть дана функция $f(x)=10x^3-9x^5$, $x\in(0;1]$. Заметим, что при $a=b=c=\frac{1}{3}$ справедливо равенство

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)=1.$$

Составим уравнение касательной к графику функции f в точке $x_0=\frac{1}{3}$:

$$y=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{25}{9}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{25}{9}x-\frac{16}{27}.$$



Рассмотрим неравенство (см. рис. 5)

$$10x^3-9x^5\geq\frac{25}{9}x-\frac{16}{27}. \qquad (6)$$

Неравенство (6) можно записать также в следующем виде

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(9x^3+6x^2-7x-\frac{16}{3}\right)\leq 0.$$

А поскольку для всякого $x\in(0;0{,}9)$ выполнено

$$9x^3+6x^2-7x-\frac{16}{3}=(x-0{,}9)(9x^2+14{,}1x+5{,}69)-\frac{637}{3000}<0,$$

то неравенство (6) справедливо при всех $x\in(0;0{,}9)$. Значит, если положительные числа *a, b, c* меньше 0,9 и их сумма равна 1, то согласно неравенству (6) имеем

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geq\frac{25}{9}(a+b+c)-3\cdot\frac{16}{27}=1.$$

Если же хотя бы одно из чисел *a, b, c* не меньше 0,9, то в силу того, что функция f убывает на промежутке [0,9; 1], т.к.

$$f'(x)=-45x^2\left(x^2-\frac{2}{3}\right)<0, \text{где } x\in[0{,}9;1],$$

и функции f на всем промежутке (0; 1] принимает неотрицательные значения имеем

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)=f(a)+f(b)+f(c)\geq$$

$$\geq\min_{[0{,}9;\,1]}f(x)=f(1)=1.$$

Тем самым, требуемое неравенство доказано.

Средние степенные

Одним из недостатков теорем 1 и 2 является то, что в них тип функции в касательной и в условиях на переменные совпадает, попытаться отойти от этого можно с помощью свойств средне степенных (подробнее см., например, [12], стр. 12-23).

Определение 2. Пусть даны положительные числа x_1, x_2, …., x_n. Если число α отлично от нуля, то средним степенным чисел x_1, x_2, …., x_n называется число

$$c_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Если α=0, то

$$c_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Справедлива

Теорема 3 (достаточные условия для выполнения неравенство Йенсена). *Пусть даны число α, положительное число x_0 и натуральное число $n\geq 2$. Пусть дана функция f, определенная на множестве всех положительных чисел, и дифференцируема в точке x_0. Если $(\alpha - 1) \cdot f'(x_0) \leq 0$ и для всякого положительного числа x такого, что $x^\alpha < nx_0^\alpha$ выполнено $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, то*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0),$$

где x_1, x_2, …, $x_n>0$ и $c_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_0$.

Доказательство. Если $\alpha\neq 0$ и для положительных чисел x_1, x_2, …, $x_n>0$ выполнено $c_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_0$, то вне зависимости положительно или нет число α для каждого k=1, 2, …, n выполнено неравенство $x_k^\alpha < nx_0^\alpha$. Если же α=0, то указанное неравенство также выполнено.

Пусть $\alpha<1$. Тогда $f'(x_0) \geq 0$. Согласно теореме о монотонности средне степенных (см., например, [12], стр. 21) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x_j - x_0)\right) = nf(x_0) + nf'(x_0)(c_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_0) \geq$$

$$\geq nf(x_0) + nf'(x_0)(c_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_0) = nf(x_0)$$

Случай $\alpha>1$ аналогичен предыдущему. А случай $\alpha=1$ следует из теоремы 1. Тем самым, теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 следует важный практический смысл. Если в условии задачи имеется ограничение, например, на сумму квадратов переменных, то рассматривать в качестве локальной опорной кривой касательную прямую имеет смысл, если производная соответствующей функции в точке касания отрицательна. Если же, например, произведение переменных постоянно, то желательно, чтобы производная функции в точке касания была положительной. Если же указанное условие для функции не выполнено, то желательно в качестве касательной брать многочлен той же степени, что и порядок степени переменных в условии задачи. То есть в случае ограничения на сумму квадратов переменных и

положительности значений производной функции в точке касания в качестве касательной можно попробовать параболу с абсциссой вершины в точке 0.

Решение примера 4 (*Лепес А.*). Пусть $f(x) = -x \cdot \sqrt[3]{12 - x^2}$, где $x \in (0; 2\sqrt{3})$. Составим уравнение касательной к графику функции f в точке x_0=2:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -4 - \frac{2}{3}(x - 2) = -\frac{4x+4}{3}.$$

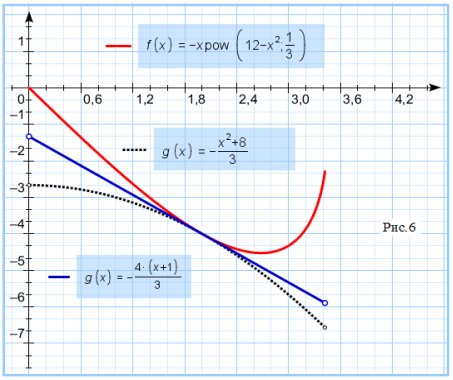


Рис.6

Заметим, что для всякого положительного числа x выполнено неравенство $f''(x) = \frac{\frac{2}{3}x}{\sqrt[3]{(12-x^2)^2}} + \frac{\frac{16}{9}x^3}{\sqrt[3]{(12-x^2)^5}} > 0$, следовательно, функция f выпукла вниз на интервале $(0; 2\sqrt{3})$, а значит ее график лежит не ниже касательной прямой (см. рис.6). Тогда согласно теореме 3 при α=2, x_0=2, $f(2)$=-4, $f'(2)$=-2/3 имеем

$$-a \cdot \sqrt[3]{b^2 + c^2} - b \cdot \sqrt[3]{c^2 + a^2} - c \cdot \sqrt[3]{a^2 + b^2} \geq -3 \cdot 4 = 12,$$

причем равенство достигается при a=b=c=2. Таким образом,

$$\max_{\substack{a^2+b^2+c^2=3,\\ a,b,c>0}} \left(a \cdot \sqrt[3]{b^2 + c^2} + b \cdot \sqrt[3]{c^2 + a^2} + c \cdot \sqrt[3]{a^2 + b^2}\right) = 12.$$

Замечание 2. В решении примера 4 мы использовали касательную прямую, однако можно было в качестве локальной опорной кривой использовать и параболу (см.рис.6). То есть был выбор, а в решении примера 1 мы не рассматривали в качестве локальной опорной кривой прямую, однако в точке касания производная функции – отрицательна, что соответствует условию теоремы 3. Единственное, что из рисунка 3 можно предположить, что график функции не лежит по одну сторону от касательной прямой, поэтому необходимо разбить область определения также как в теореме 2. Ясно, что такое доказательство, даже если оно возможно, будет сложнее представленного выше.

На практике выбор типа локальной опорной кривой является весь важным моментом. И теорема 3 может подсказать не только, когда стоит рассматривать касательную прямую, но и когда необходимо выбрать что-то другое. Например, в 2005 году на Балтийской олимпиаде было следующее неравенство (задача 5):

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1,$$

где a, b, c – положительные числа такие, что abc=1.

Из 11 команд данное неравенство смогли доказать только команды стран Эстонии, Исландии и Польши. При этом в книге [1] на 246 (задача 56) имеется решение, в котором используется только неравенство Коши. Однако опять же для применения неравенства Коши необходимы представления типа a^2+2=a^2+1+1, которые, безусловно, понятны, не ясно только как догадаться до них самостоятельно. Ведь 8 команд не смогли доказать указанное неравенство. Благодаря же теореме 3, хотя она и не является критерием, можно обратить

внимание на то, что производная функции $f(x) = -\frac{x}{x^2+2}$, где $x>0$, в точке касания $x_0=1$ должна быть положительна, поскольку по условию $\alpha=0$. А эта производная отрицательна. Следовательно, рассматривать в качестве локальной опорной кривой прямую, несмотря на то, что функция *f* выпукла вниз, нет необходимости, значит, необходимо попробовать другой тип локальной опорной кривой. И как было указано для подобных случаев у Фам Ким Хунга в книге [3] на странице 136, можно попробовать следующую функцию

$$g(x) = -\frac{3 + lnx}{9}, \text{где } x > 0.$$

Конечно, график функции *f* не лежит по одну сторону от графика функции *g*, однако поступая также, как и в доказательстве теоремы 2, можно доказать требуемое неравенство.

В теореме 3 ограничение имеется на сумму некоторых степеней переменных, а в качестве касательная рассматривается прямая. Естественно поставить аналогичный вопрос о целесообразности рассмотрения в качестве касательной некоторую степенную функцию, если ограничение в условии задачи имеется на сумму переменных.

Теорема 4 (достаточные условия для выполнения неравенство Йенсена). *Пусть даны число $\alpha\neq0$, положительное число x_0 и натуральное число $n\geq2$. Пусть дана функция f, определенная на множестве всех положительных чисел, и дифференцируема в точке x_0. Если $(\alpha - 1) \cdot f'(x_0) \geq 0$ и для всякого положительного числа x такого, что $x < nx_0$ выполнено $f(x) \geq \frac{f'(x_0)}{\alpha \cdot x_0^{\alpha-1}}(x^\alpha - x_0^\alpha) + f(x_0)$, то*

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq nf(x_0),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx_0$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Необходимо отметить, что теоремы 3 и 4 могут быть также обобщены, как и теорема 1.

Частный случай

Теорема 5. *Пусть дан многочлен $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq0$, натуральное число n и положительное число x_0. Пусть даны неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сумма которых равна nx_0. Если $2ax_0+b\geq0$ и $(n+2)ax_0+b\geq0$, то справедливо неравенство Йенсена в точке x_0.*

Доказательство. Согласно лемме 2 функция $P(x)-P(x_0)-P'(x_0)(x-x_0)$ представляется в виде $(x - x_0)^2 P_1(x) = (x - x_0)^2(ax + 2ax_0 + b)$. А поскольку

$$\sum_{j=1}^{n} P'(x_0)(x_j - x_0) = P'(x_0)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - nx_0\right) = 0,$$

то неравенство $\sum_{j=1}^{n} P(x_j) \geq nP(x_0)$ эквивалентно следующему

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0)^2(ax_j + 2ax_0 + b) \geq 0.$$

Заметим, что из того, что сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна nx_0 следует, что каждое из этих чисел принадлежит промежутку $[0; nx_0]$. Однако в силу монотонности функции $ax + 2ax_0 + b$ и неотрицательности чисел $2ax_0+b$ и $(n+2)ax_0+b$ для всякого $x \in [0; nx_0]$ справедливо неравенство $ax + 2ax_0 + b \geq 0$. Последнее означает, что требуемое неравенство является верным. Следовательно, теорема 5 доказана.

Замечание 3. Как известно, для того, чтобы многочлен $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ был выпуклым вниз необходимо и достаточно, чтобы $P''(x) = 6ax + 2b \geq 0$ на всем промежутке $[0; nx_0]$. А для этого необходимо, чтобы $b>0$ и $3nax_0+b>0$. Если числа a, b, n, x_0 удовлетворяют указанным неравенствам, то они и удовлетворяют неравенствам $2ax_0+b\geq 0$ и $(n+2)ax_0+b\geq 0$. Что вполне соответствует общеизвестному факту, что неравенство Йенсена выполнено для выпуклых функций. Однако, если числа a, b, n, x_0 удовлетворяют неравенствам $2ax_0+b\geq 0$ и $(n+2)ax_0+b\geq 0$, то они не обязаны удовлетворять обоим неравенствам $b>0$ и $3nax_0+b>0$. Например, такими числами могут быть $n=3$, $a=1$, $b=-1$, $x_0=1$. То есть любая функция вида $P(x) = x^3 - x^2 + cx + d$ является невыпуклой на отрезке [0; 3], но при этом для нее справедливо неравенство Йенсена в точке $x_0=1$. Ясно, что такой набор чисел n, a, b, x_0 не единственный, можно, например, взять $a=1$, $b= - x_0$, $x_0>0$, $n\geq 2$. Тем самым показано, что существует бесконечно невыпуклых функций, для которых выполнено неравенство Йенсена в заданной точке.

Решение примера 5 (*Лепес А.*). В случае $n\geq 2$ требуемое неравенство следует из теоремы 5 при $a=-1$, $b=2$, $c=-1$, $d=0$. Если $n=1$, то наше неравенство запишется в виде $0\leq 0$, что является верным.

Таким образом, основным результатом настоящего проекта является получение различных достаточных условий на функции, обеспечивающие выполнение неравенства Йенсена в заданной точке (теоремы 1-4), которые существенно расширяют класс известных функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена. В указанный класс входят также невыпуклые функции, причем показано (теорема 5), что таких функций бесконечно много. Найдены необходимые условия, помогающие выбрать локальные опорные кривые среди дифференцируемых функций (лемма 1) и показаны их некоторые свойства (лемма 2), которые полезны на практике.

Литература

1. Chetkovski Z. Inequalities. Theorems, techniques and Problems. – Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2012.
2. http://www.balticway-2011.de
3. Pham Kim Hung Secrets in Inequalities (volume 1). – Zalău : Gill. 2007.
4. http://www.ut.ee/bw2002
5. Берлов С.Л., Петров Ф.В., Смирнов А.В. Петербургские математические олимпиады 2011 года – М.: МЦНМО, 2012.
6. Suppa E. Inequalities from around the world 1995-2005. Teramo, 2011. 157 p.
7. Шабунин М.И. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008.

8. Гаврилов В.И., Субботин А.В. Изложение темы «выпуклые функции» в университетском курсе математического анализа// Математика в высшем образовании. 2003. №1. С. 21-28.
9. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Йенсена//Квант. 2000. N 4. С.7-10.
10. Курляндчик Л., Файбусович А. История одного неравенства//Квант. 1991. N 4. С.14-18.
11. Берколайко С.Т., Каток С.Б. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств//Квант. 1970.N8. С.33-36, 64.
12. Коровкин П.П. Неравенства. – М.: Наука, 1966.