**Связь одной кривой третьего порядка и треугольника**

Выполнил ученик 11 «б» ГБОУ школа им. Маршала В.И. Чуйкова

Чурилин Александр Дмитриевич

Научный руководитель: Привалов А.А

**Основные понятия.**

Кривые третьего порядка.

 В общем случае уравнение кривой линии третьего порядка можно записать так:

A𝑥^3+3B𝑥^2y+3Cx𝑦^2+D𝑦^3+3E𝑥^2+6Fxy+3G𝑦^2+3Hх+3Ky+L=0 (1)

Пусть y = kx + b — уравнение асимптоты кривой. Как известно, для определения параметров k и b необходимо подставить в уравнение этой кривой вместо у выражение kx+b и, взяв в полученном таким образом уравнении коэффициенты двух членов со старшими степенями х, приравнять их нулю. Получаемая при этом система с неизвестными k и b и служит для их определения.

Для кривой (1) угловой коэффициент асимптоты определится равенством:

A+3Bk+ЗС𝑘^2+D𝑘^3 = 0. (2)

Второй параметр асимптоты — ее начальная ордината b — определится равенством

(В + 2Ck + D𝑘^2)b = — (E+2Fk + G𝑘^2) (3),

где k имеет значение, найденное из уравнения (2).

Уравнение (2), будучи кубическим относительно *k*, даст нам или три действительных значения для *k*, или одно действительное и два комплексных. Эти значения *k* и будут определять направление бесконечных ветвей и их количество. Но для того чтобы асимптота в направлении *k* действительно существовала, необходимо, чтобы при этом значении *k* начальная ордината *b* определялась из равенства (3), чего может и не быть.

Таким образом, количество бесконечных ветвей кривой (1) зависит от числа действительных корней уравнения (2); характер ветвей определится равенством (3).

Если при k = k1 где k1 — действительный корень уравнения (2), уравнение (3) имеет решение — действительное число b1 то соответствующая ветвь кривой будет иметь асимптоту y=k1x+b1, т. е. будет ветвью гиперболического типа. Если же решение уравнения (3) при k = k1 не существует или оказывается неопределенным, то соответствующая ветвь кривой будет параболической, т. е. не будет иметь асимптоты.

**Постановка задачи.**

Для чисел *а* и *r* (*a>*2*r*) найти геометрическое место точек *М*(*x*,*y*) таких, что в треугольник *ОАМ* (*О*(0,0), *А*(*а*,0)) вписывается окружность радиуса *r*.



Решение. Пусть *С*(*t*,*r*) – центр окружности, вписанной в треугольник *АВМ* , где *А*(-*а*,0), *В*(*а*,0), *М*(*x*,*y*). Тогда *АС* и *ВС* – биссектрисы треугольника *АВМ* , отсюда имеем:

 или 

Решаем эту систему уравнений:



Вычитаем из первого уравнения второе и умножаем на), получаем:

$$\left(t+a\right)\left(a-t\right)\left(\left(xa+a^{2}-ta-tx-a^{2}+xa+xt-at\right)\right)=$$

$$=r^{2}(xt+a^{2}+ax+at-a^{2}+ax+at-tx)$$

$$\left(t+a\right)\left(a-t\right)\left(2a\right)\left(x-t\right)=r^{2}\left(2a\right)\left(x+t\right)$$

$$\left(a^{2}-t^{2}\right)\left(x-t\right)=r^{2}(x+t)$$

$$a^{2}x-t^{2}x-a^{2}t+t^{3}=r^{2}x+tr^{2}$$

$$x\left(a^{2}-t^{2}-r^{2}\right)=t(r^{2}+a^{2}-t^{2})$$

$$x=\frac{t(r^{2}+a^{2}-t^{2})}{\left(a^{2}-t^{2}-r^{2}\right)}$$

 (1)

Эта кривая имеет наклонные асимптоты:

 и 

где , т.е. когда касательные к окружности (биссектрисы *АС* и *ВС*) параллельны.



Найдем уравнение кривой в координатах *х* и *у*. Из второго уравнения системы (1) имеем



Подставляя эти равенства в первое уравнение системы (1), после возведения в квадрат, получим



Или



Это уравнение есть уравнение кривой 3-го порядка. Для построения выразим *х* через *у*:



Для удобства введем обозначения:



Тогда получим следующее уравнение:



График этой кривой имеет три асимптоты:



**Классификация ньютона.**

Данная кривая описана в классификации Ньютона и является кривой треть его порядка из первой группы.

все три корня уравнения действительные и различные; кривая имеет три асимптоты и три гиперболические ветви. Кривые этой группы носят название hyperbolae redan- dantes (раскинутые гиперболы);

В нашем случае два корня уравнения равны между собой, а остальные корни или комплексные, или одновременно больше или меньше равных корней; кривая состоит из трех гиперболических ветвей, две из которых пересекаются между собой.

**Для демонстрации мы используем программу Graphics3HELP.HTML**

**И пишем программу на языке Java Script.**

**Данная программа указана в заметках.**

**Новая задача.**

Далее мы решили посмотреть, что получится, если мы заменим прямую на полуокружность.

**Формулировка задачи.**

Имеется полуокружность(AB). По ней катиться окружность. Из точек A и B проведены касательные к окружности. Вывести уравнение траектории точки пересечения касательных.

**Решение:**

Мы вводим систему координат.

Чтобы описать движение данной точки нам необходимо найти угол наклона касательной к окружности, то есть найти коэффициент *k*. Так как из одной точки можно провести две касательные, мы возьмём верхнюю. Получаем некоторые системы уравнений.

$\left\{\begin{array}{c}y=k(x+R)\\\left(x-x\_{0}\right)^{2}+(y-y\_{0})^{2}=r^{2}\end{array}\right.$(1)

$\left\{\begin{array}{c}y=k^{1}\left(x-R\right)\\\left(x-x\_{0}\right)^{2}+\left(y-y\_{0}\right)^{2}=r^{2}\end{array}\right.$(2)

Решаем первую систему(1):

$$\left(x-x\_{0}\right)^{2}+(k(x+R)-y\_{0})^{2}=r^{2}$$

$$x^{2}-2xx\_{0}+x\_{0}^{2}+k^{2}(x+R)^{2}-2k\left(x+R\right)y\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2}=0$$

$$x^{2}-2xx\_{0}+x\_{0}^{2}+2k^{2}xR+k^{2}x^{2}+k^{2}R^{2}-2kxy\_{0}-2kRy\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2}=0$$

$$(k^{2}+1)x^{2}+\left(2k^{2}R-2ky\_{0}-2x\_{0}\right)x+x\_{0}^{2}+k^{2}R^{2}-2kRy\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2}=0$$

$$D=\left(2k^{2}R-2ky\_{0}-2x\_{0}\right)^{2}-4\left(k^{2}+1\right)(x\_{0}^{2}+k^{2}R^{2}-2kRy\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2})$$

Так как нам нужна касательная, нас интересует только, когда одно решение, а значит *D* = 0.

$\left(2k^{2}R-2ky\_{0}-2x\_{0}\right)^{2}-4\left(k^{2}+1\right)\left(x\_{0}^{2}+k^{2}R^{2}-2kRy\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2}\right)=0 $

$k^{4}R^{2}+k^{2}y\_{0}^{2}+x\_{0}^{2}-2k^{3}Ry\_{0}+2x\_{0}ky\_{0}-2k^{2}Rx\_{0}-k^{2}x\_{0}^{2}-k^{4}R^{2}+2k^{3}Ry\_{0}-k^{2}y\_{0}^{2}$+

$$+k^{2}r^{2}-x\_{0}^{2}-k^{2}R^{2}+2kRy\_{0}-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$2x\_{0}ky\_{0}-2k^{2}Rx\_{0}-k^{2}x\_{0}^{2}+k^{2}r^{2}-k^{2}R^{2}+2kRy\_{0}-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$k^{2}\left(-2Rx\_{0}-x\_{0}^{2}+r^{2}-R^{2}\right)+k(2Ry\_{0}+2x\_{0}y\_{0})-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$\left(r^{2}-(x\_{0}+R)^{2}\right)k^{2}+2y\_{0}\left(R+x\_{0}\right)k-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$k\_{1}=\frac{y\_{0} \left(x\_{0}+R\right)+r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+(x\_{0}+R)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}+R\right)^{2}}$$

$$k\_{2}=\frac{y\_{0} \left(x\_{0}+R\right)-r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+(x\_{0}+R)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}+R\right)^{2}}$$

Точно также решаем вторую систему(2):

$$\left(x-x\_{0}\right)^{2}+(k^{1}(x-R)-y\_{0})^{2}=r^{2}$$

$$x^{2}-2xx\_{0}+x\_{0}^{2}+k^{1}^{2}(x-R)^{2}-2k^{1}\left(x-R\right)y\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2}=0$$

$$x^{2}-2xx\_{0}+x\_{0}^{2}-2k^{1}^{2}xR+k^{1}^{2}x^{2}+k^{1}^{2}R^{2}-2k^{1}xy\_{0}+2k^{1}Ry\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2}=0$$

$$(k^{1}^{2}+1)x^{2}+\left(-2k^{1}^{2}R-2k^{1}y\_{0}-2x\_{0}\right)x+x\_{0}^{2}+k^{1}^{2}R^{2}+2k^{1}Ry\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2}=0$$

$$D=\left(-2k^{1}^{2}R-2k^{1}y\_{0}-2x\_{0}\right)^{2}-4\left(k^{1}^{2}+1\right)(x\_{0}^{2}+k^{1}^{2}R^{2}+2k^{1}Ry\_{0}+y\_{0}^{2}-r^{2})$$

Так как нам нужна касательная, нас интересует только, когда одно решение, а значит *D* = 0.

$\left(-2k^{1}^{2}R-2k^{1}y\_{0}-2x\_{0}\right)^{2}-4\left(k^{1}^{2}+1\right)\left(x\_{0}^{2}+k^{1}^{2}R^{2}+2k^{1}Ry\_{0}+y\_{0}^{2}--r^{2}\right)=0 $

$$k^{1}^{4}R^{2}+k^{1}^{2}y\_{0}^{2}+x\_{0}^{2}+2k^{1}^{3}Ry\_{0}+2x\_{0}k^{1}y\_{0}+2k^{1}^{2}Rx\_{0}-k^{1}^{2}x\_{0}^{2}-k^{1}^{4}R^{2}-2k^{1}^{3}Ry\_{0}-$$

$$-k^{1}^{2}y\_{0}^{2}+k^{1}^{2}r^{2}-x\_{0}^{2}-k^{1}^{2}R^{2}-2k^{1}Ry\_{0}-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$2x\_{0}k^{1}y\_{0}+2k^{1}^{2}Rx\_{0}-k^{1}^{2}x\_{0}^{2}+k^{1}^{2}r^{2}-k^{1}^{2}R^{2}-2k^{1}Ry\_{0}-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$k^{1}^{2}\left(2Rx\_{0}-x\_{0}^{2}+r^{2}-R^{2}\right)+k^{1}(-2Ry\_{0}+2x\_{0}y\_{0})-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$\left(r^{2}-(x\_{0}-R)^{2}\right)k^{1}^{2}+2y\_{0}\left(x\_{0}-R\right)k^{1}-y\_{0}^{2}+r^{2}=0$$

$$k^{1}\_{1}=\frac{y\_{0} \left(x\_{0}-R\right)+r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+(x\_{0}-R)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}-R\right)^{2}}$$

$$k^{1}\_{2}=\frac{y\_{0} \left(x\_{0}-R\right)-r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+(x\_{0}-R)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}-R\right)^{2}}$$

Далее ищем геометрическое место точек данной кривой с помощью новой системы пересечения двух касательных.

$$\left\{\begin{array}{c}Y=k^{1}(X-R)\\Y=k(X+R)\end{array}\right.$$

Выражаем X и Y:

$Y=kR(1-\frac{k^{1}+k}{k-k^{1}}$)

$$X= - R(\frac{k^{1}+k}{k-k^{1}})$$

Подставляем нужное значение *k* и получаем координаты кривой:

$$Y=R\left(\frac{y\_{0} \left(x\_{0}+R\right)+r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}+R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}+R\right)^{2}}\right)×$$

$$×\left(1-\frac{\frac{y\_{0} \left(x\_{0}-R\right)-r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}-R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}-R\right)^{2}}+\frac{y\_{0} \left(x\_{0}+R\right)+r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}+R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}+R\right)^{2}}}{\frac{y\_{0} \left(x\_{0}+R\right)+r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}+R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}+R\right)^{2}}-\frac{y\_{0} \left(x\_{0}-R\right)-r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}-R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}-R\right)^{2}}}\right)$$

$$X=$$

$$= - R \left( \frac{\frac{y\_{0} \left(x\_{0}-R\right)-r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}-R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}-R\right)^{2}}+\frac{y\_{0} \left(x\_{0}+R\right)+r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}+R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}+R\right)^{2}}}{\frac{y\_{0} \left(x\_{0}+R\right)+r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}+R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}+R\right)^{2}}-\frac{y\_{0} \left(x\_{0}-R\right)-r\sqrt{y\_{0} ^{2}-r^{2}+\left(x\_{0}-R\right)^{2} }}{r^{2}-\left(x\_{0}-R\right)^{2}}}\right)$$

**Для демонстрации кривой используем программу MATHCAD.**

****

**Что получено?**

Получена траектория точки пересечения касательных проведенных из двух заданных точек А и В к окружности, которая катится по прямой (АВ).

Найдены асимптоты этой кривой.

Так же получена траектория точки пересечения касательных проведенных из двух заданных точек А и В к окружности, которая катится по полуокружности (АВ).

**Что буду делать дальше?**

Найти порядок новой кривой.

Получить траекторию точки пересечения касательных проведенных из двух заданных точек А и В к окружности, которая катится по полуэллипсу (АВ).

**Заметки:**

**Для демонстрации мы используем программу Graphics3HELP.HTML**

**И пишем программу на языке Java Script.**



*а*=20, *b*=15

 

*а*=20, *b*=15

function xn(z){return (z\*z-r\*r)\*(a-z)/(a\*z-z\*z-r\*r)}

function yn(z){return 2\*r\*z\*(a-z)/(a\*z-z\*z-r\*r)}

a=40;r=15;h=a/100;h1=a/10;tn=sqrt(a\*a-4\*r\*r);tk=(a+tn)/2;tn=(a-tn)/2;//t0=tn

u[0]=new Array();u[1]=new Array();u[2]=new Array();u[3]=new Array();u[4]=new Array();

u[7]=new Array();u[8]=new Array();

u[5]=new Array();u[6]=new Array();wc[0]='red';wt[0]=2;wc[1]='blue';wt[1]=3;wc[2]='aqua';

wt[2]=2;wc[3]='pink';wt[3]=1;wc[4]='pink';wt[4]=3;wc[7]='red';wc[8]='red';wt[7]=1;wt[8]=1;

i=0;for(t=tn+h1;t<tk-h1;t+=h){u[0][i]=xn(t)+','+yn(t);i++}

u[1][0]='0,0';u[1][1]=a+',0';x=xn(t0);y=yn(t0);u[1][2]=x+','+y;u[1][3]='0,0';

r0=y\*a/(sqrt(x\*x+y\*y)+sqrt((x-a)\*(x-a)+y\*y)+a);

i=0;for(t=0;t<6.3;t+=.1){u[2][i]=(r\*cos(t)+t0)+','+(r\*sin(t)+r);i++}

x=xn(tn+h1);u[3][0]='0,0';u[3][1]=x+','+2\*r\*tn/(tn\*tn-r\*r)\*x;

x=xn(tk-h1);u[4][0]=a+',0';u[4][1]=x+','+2\*r\*(a-tk)/((a-tk)\*(a-tk)-r\*r)\*(a-x);

i=0;for(t=0;t<6.3;t+=.1){u[5][i]=(r\*cos(t)+tn)+','+(r\*sin(t)+r);i++}

i=0;for(t=0;t<6.3;t+=.1){u[6][i]=(r\*cos(t)+tk)+','+(r\*sin(t)+r);i++}

t0+=h;if(t0>tk-h1)t0=tn+h1;

cle();ris(u,wc,wt,3)

't0='+t0+', tk='+tk+', r0='+r0+', r='+r+', a='+a

function yn(z){return (z+r)\*sqrt(1-c/z)\*c1}

a=20;r=15;n=100;h=.1;c=r\*r/(a\*a-r\*r);c1=sqrt(1/c);c\*=2\*r;b=(2\*r-c)\*c1/2;x0=5\*c;y0=yn(x0)

u[0]=new Array();u[1]=new Array();u[2]=new Array();u[3]=new Array();u[4]=new Array();u[5]=new Array();

u[6]=new Array();u[7]=new Array();

wc[0]='red';wt[0]=2;wc[1]='red';wt[1]=2;wc[2]='red';wt[2]=2;wc[3]='red';wt[3]=2;wc[4]='aqua';wt[4]=1;

wc[5]='aqua';wc[6]='blue';wc[7]='blue'

i=0;for(x=c;x<x0;x+=h){u[0][i]=x+','+yn(x);u[1][i]=x+','+(-yn(x));i++}

i=0;for(x=-x0;x<-h;x+=h){u[2][i]=x+','+yn(x);u[3][i]=x+','+(-yn(x));i++}

u[4][0]='0,'+y0;u[4][1]='0,'+(-y0);u[5][0]=x0+',0';u[5][1]=-x0+',0';

u[6][0]=-x0+','+(b-x0\*c1);u[6][1]=x0+','+(b+x0\*c1);u[7][0]=-x0+','+(-b+x0\*c1);u[7][1]=x0+','+(-b-x0\*c1);

cle();ris(u,wc,wt,3)

'a='+a+', r='+r+', c='+c+', c1='+c1

function xn(z){return z\*(a\*a-z\*z+r\*r)/(a\*a-z\*z-r\*r)}

function yn(z){return 2\*r\*(a\*a-z\*z)/(a\*a-z\*z-r\*r)}

a=20;r=15;h=a/100;h1=a/5;tk=sqrt(a\*a-r\*r);tn=-tk; //t0=4\*a-h1

u[0]=new Array();u[1]=new Array();u[2]=new Array();u[3]=new Array();u[4]=new Array();

u[7]=new Array();u[8]=new Array();

u[5]=new Array();u[6]=new Array();wc[0]='red';wt[0]=2;wc[1]='blue';wt[1]=3;wc[2]='aqua';

wt[2]=2;wc[3]='red';wt[3]=2;wc[4]='red';wt[4]=2;wc[5]='aqua';wt[5]=1.5;

wc[8]='red';wt[7]=1;wt[8]=1;

i=0;for(t=tn+h1;t<tk-h1;t+=h){u[0][i]=xn(t)+','+yn(t);i++}

u[1][0]=-a+',0';u[1][1]=a+',0';x=xn(t0);y=yn(t0);u[1][2]=x+','+y;u[1][3]=u[1][0];

//r0=y\*a/(sqrt((x+a)\*(x+a)+y\*y)+sqrt((x-a)\*(x-a)+y\*y)+a);

i=0;for(t=0;t<6.3;t+=.1){u[2][i]=(r\*cos(t)+t0)+','+(r\*sin(t)+r);i++}

i=0;for(t=-4\*a;t<tn-h1;t+=h){u[3][i]=xn(t)+','+yn(t);i++}

i=0;for(t=tk+h1;t<4\*a;t+=h){u[4][i]=xn(t)+','+yn(t);i++}

u[5][0]=-4\*a+',0';u[5][1]=4\*a+',0';

//t0+=h;if(t0>tk-h1)t0=tn+h1;

t0+=h;

if(t0>4\*a)t0=-4\*a;

//alert('t0='+t0+', tk='+tk+', r0='+r0+', r='+r+', a='+a)

cle();ris(u,wc,wt,3)

 't0='+t0+', tk='+tk+', r0='+r0+', r='+r+', a='+a

**Источники литературы:**

[Смогоржевский А.С.: Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. - М.: Госфизматлитиздат, 1961](http://2dip.su/%D1%81%D0%BF%D0%B8%D1%81%D0%BE%D0%BA_%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D1%8B/134200)

[Савелов А. А.](http://spisok-literaturi.ru/author/savelov-a-a.html): Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Справочное руководство.- М.: [Государственное издательство физико-математической литературы](http://spisok-literaturi.ru/publisher/gosudarstvennoe-izdatelstvo-fiziko-matematicheskoy-literaturyi.html?id=10002&show=all),1960