**О некоторых задачах про правильные многоугольники .**

Назовем эти задачи ВГ9 и ВГ10.

Пусть *А*0, …, *Аn-*1 – вершины правильного многоугольника, *М* – точка окружности описанной около этого многоугольника и лежащая для определенности на дуге *А*0*А*1; *l* – прямая, проходящая через центр этой окружности. *r*(*A*,*l*) – расстояние от точки *А* до прямой *l*.

**Задача ВГ9**. При каких натуральных числах *n* и *р* суммы:

 и 

не зависят от выбора прямой *l* и чему они равны в этом случае ? Здесь числа ε*j*=±1, в зависимости от того лежит ли точка *Аj*над или под прямой *l*.

**Задача ВГ10**. При каких натуральных числах *n* и *р* суммы:

 и 

не зависят от выбора прямой *l* и чему они равны в этом случае ?

Задача ВГ10 была поставлена А.Г. Мякишевым во время чтения лекции работы летнего профильного лагеря 2014 г в ГОУ Лицей 1303. Им были рассмотрены частные случаи задачи и указаны некоторые пути ее решения.

Здесь мы рассмотрим только частные случаи этих задач, а именно суммы *s*(*p*,*n*,*l*) и *sm*(*p*,*n*,*M*) рассмотрим для четных *р* (*p*=2*k*), а выражения *s*0(*p*,*n*,*l*) и *sm*0(*p*,*n*,*M*) – для нечетных. Сформулируем и докажем следующие теоремы.

**Теорема 28** (задача ВГ9). Пусть *n>*1 и *p*=2*k* – натуральные числа. Тогда  не зависит от выбора прямой только при всех четных *n>*2*k* или нечетных *n > k*. При этом

.

**Теорема 29** (задача ВГ9). Пусть *p*=2*k*+1 (*k*≥0) – нечетное число. Тогда суммы =0, при всех четных *n* и всех нечетных *n>p* и прямых l, проходящих через центр описанной окружности. Для других *n* эти суммы зависят от прямой *l*. (числа ε*j*=±1, в зависимости от того лежит ли точка *Аj*над или под прямой *l*, равны нулю)

**Теорема 30** (задача ВГ10). Пусть *n>*1 и *p*=2*k* – натуральные числа. Тогда  не зависит от выбора точки *M* только если *n>k*. При этом

.

**Теорема 31** (задача ВГ10). Пусть *p*=2*k*+1 (*k*≥0) – нечетное число. Тогда суммы =0, для любых нечетных *n* больших *р*=2*k*+1 и точек *М*, лежащих на дуге *А*0*А*1. Для других *n* эти суммы зависят от точки *М*.

Для доказательства этих теорем введем систему координат так что вершины правильного *n*-угольника имеют вид:



Пусть точка *М*(cosα, sinα) и прямая *l*, проходящая через точку (0,0) имеет вид: *x*cos*α* + *y*sin*α* = 0. Их соображений симметрии можно считать, что . Кроме того нам понадобятся некоторые формулы факты:

1. 

Для доказательства этих формул можно воспользоваться формулами Эйлера: , где *i* – мнимая единица (*i*2=-1), и формулой бинома Ньютона. Например, докажем первую



Остальные формулы легко вывести, если вспомнить, что



и



1. Тригонометрические системы {1, sin*x*, cos*x*, sin2*x*, …, sin*nx*, cos*nx*} линейно независимы. Это значит, что



1.  только в том случае, если *k* не делится на *n*.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся формулой Эйлера:  и формулой суммы геометрической прогрессии : . Тогда



Доказательство теоремы 28. Заметим, что

 (29)

Отсюда при *р=*2*k* из формул 1. имеем



В силу 2. и 3. первое слагаемое будет равно 0 при всех *α*, если только все четные числа 2, 4, …, 2*k*, не будут делиться на *n*. То есть *s*(2*k*,*n*,*α*) не зависит от *α* только при всех четных *n >* 2*k* и нечетных *n > k*. Теорема 28 доказана.

Доказательство теоремы 29. Из (29) и формул 1. Имеем



В силу 2. и 3., если хотя бы одно из чисел 3,5,…, 2*k*+1 будет делиться на *n*, то это выражение (*s*0) будет зависеть от *α* и будет равно нулю в противном случае. То есть *s*0(2*k*+1, *n*, *α*)=0 при всех четных *n* и всех нечетных *n* больших *р*=2*k*+1 (*k*≥0). Теорема 29 доказана.

Доказательство теоремы 30. Как и выше для *M*(cos *α*, sin *α*) имеем



Отсюда, следует, что *sm*(2*k*,*n*,*α*) не зависит от *α*, если только все числа 3, …, *k*, не будут делиться на *n* (тогда в силу 3. первое слагаемое в последнем равенстве будет равно нулю). То есть то *s*(2*k*,*n*,*α*) не зависит от *α*, только если *n>k*, в противном случае зависит. Теорема 30 доказана.

Доказательство теоремы 31. Для удобства положим *q*=1,2,…,*n* и , тогда

(30)

Далее рассмотрим суммы:



Применяя формулу Эйлера получаем



Отсюда и (30) вытекает, что



только в том случае, если *n* нечетное и больше *р*=2*k*+1. Теорема 31 доказана.

▼

**О корнях одного алгебраического выражения.**

Профессор МГУ им. М.В. Ломоносова Мирзоев К.А. (Карахан Агахан оглы) предложил рассмотреть задачу о распределении корней уравнения:

*P*(*z*2) + *izQ*(*z*2)=*i* (1)

где *P*(*z*) и *Q*(z) – многочлены с действительными коэффициентами и *Q*(z) – многочлен степени *n*-1, а *P*(*z*) = *а*0*zn* +…+ *an* – многочлен степени *n* с *а*0 ≠0. В частности, показать, что уравнение (1) имеет *n* корней с положительными действительными частями и остальные *n* корней имеют отрицательные действительными части.

Для доказательства этой гипотезы сначала повернем плоскость *z* на 90о, т.е. *z* заменим на *iz*, тогда (1) примет вид

*P*(-*z*2) – *zQ*(-*z*2)=*i*

И таким образом, задача сводится к следующей: доказать, что половина корней многочлена

*W*(z) = *P*(-*z*2) – *zQ*(-*z*2) – *i* (2)

лежат выше действительной оси и половина – ниже.

Далее, нам понадобится следующая лемма

**Лемма**. Пусть ровно *k* корней многочлена *W*(z) лежат выше действительной оси. Тогда для любого действительного *С* многочлен *W*(z)+*С* имеет ровно *k* корней с положительными мнимыми частями.

Доказательство. Многочлены *W*(z)+*С*, очевидно, не имеют действительных корней. Если бы число этих корней (*k*) при добавлении *С* изменилось, то т.к. [1, стр. 137] корни многочлена непрерывно зависят от его коэффициентов и, в частности от *С*, нашлось бы такое *С*, что *W*(z)+*С* стал бы иметь действительный корень (при изменении *С* один из корней пересек бы действительную ось). Полученное противоречие доказывает лемму.

Обозначим *S*(*z*)= *W*(*z*) + *а*0*z*2*n*, где *P*(*z*2)= –*а*0*z*2*n* + … + *аn*. Тогда *S*(*z*) – многочлен степени не выше 2*n*-1. Следовательно ,

 (3)

Поэтому найдется такое число *R*0, что

| *а*0*z*2*n* | > | *S*(*z*)| при |*z*| ≥ *R*0 (4)

Без потери общности можно считать, что *а*0 > 0. Выберем число *С* < 0 (если *а*0< 0, то выбираем *С* > 0) таким, чтобы на отрезке [-*R*0, *R*0]выполнялось неравенство:

| *S*(*z*)|<–*C* (5)

Тогда, в силу (4) и (5) на любом действительном отрезке [-*α*, *α*], *α* ≥ *R*0, будет выполняться неравенство

| *S*(*z*)|< *а*0*z*2*n* – *C* (6)

Теперь для этого числа *С*, в силу (3) найдется *R* ≥ *R*0 такое, что

| *а*0*z*2*n* –*C*|>| *S*(*z*)| при |*z*|≥*R*  (7)

и корни многочлена *а*0*z*2*n* +*C* лежат в внутри круга |*z*|≤*R*.

Рассмотрим контур **Г**= [-*R*, *R*]⋃{*z=R∙eiφ*: 0 ≤ *φ* ≤ *π*}. Из (6) и (7) следует, что на этом контуре для функций *а*0*z*2*n* +*C* и *S*(*z*) выполняются условия теоремы Руше [2, стр.245] , значит *а*0*z*2*n* +*C* и –*а*0*z*2*n* –*C* + *S*(*z*) = *W*(*z*)–*С* имеют одинаковое число нулей внутри контура **Г**. Но, многочлен *а*0*z*2*n* +*C* имеет ровно 2*n* комплексно-сопряженных корней, поэтому внутри контура **Г** лежит *n* корней многочлена *W*(*z*)–*С*. В силу леммы 1 *W*(*z*) имеет ровно *n* корней с положительными мнимыми частями. Что и требовалось доказать.

Литература

[1] Островский А.М., Решение уравнений и систем уравнений – Издательство иностранной литературы, М., 1963

[2] Привалов И.И., Введение в теорию функций комплексного переменного – «Наука», М., 1984