Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью n?

Лемма: для всех составных n, кроме 4 справедливо сравнение $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$

Доказательство леммы:

запишем каноническое разложение n

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \quad \forall p_i \text{ - простое},\ \forall \alpha_i > 0$$

1.) $k > 1$ тогда $\frac{n}{p_1^{\alpha_1}} \neq 1$

$p_1^{\alpha_1} \neq \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$, так как одно из этих чисел делится на p_1, а другое нет, значит они не могут быть равны

НОД $(n-1; n) = 1$ $(n-$

значит $p_1^{\alpha_1} \neq n-1$ (одно из чисел делится 3.)
на p_1, а другое нет

$\frac{n}{p_1^{\alpha_1}} \neq n-1$ (одно из чисел делится
на p_2 а другое нет)

также оба числа $p_1^{\alpha_1}$ и $\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$
меньше $n-1$
значит они содержаться
среди чисел от 1 до $n-1$ =>
$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)! \vdots n \left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}} \cdot p_1^{\alpha_1}\right)$

2.) $k=1$ $\alpha_1 \geq 3$

$n = p_1^{\alpha_1} = p_1 \cdot p_1^{\alpha_1 - 1}$
$p_1 \neq p_1^{\alpha_1 - 1}$
$n-1$ взаимнопросто с n
значит $(n-1)! = 1 \cdot 2 \ldots p \cdot \ldots p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot (n-1) =$
$p_1^{\alpha_1} \cdot l$ где $l \in N$

$(n-1)! \vdots n$

3.) $k=1 \quad \alpha_1=2$

$n = p_1^2$

Докажем что среди чисел от 1 до $n-1$ содержится $2p$

$2p < n-1 = p_1^2 - 1$

$2p_1 < p_1^2 - 1 < p_1^2$

$2p_1 < p_1^2$

$p_1 < 2 \quad n \neq 4$ значит это верно

$(n-1)! = 1 \cdot \ldots \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot 2p_1 \cdot \ldots \cdot n-1 = m \cdot 2p_1^2 \vdots p_1^2$

$m \in N$

Лемма доказана

при $n=2$

$(n-1)!+1 = 2 = 2^1$

при $n=3$

$(n-1)!+1 = 3 = 3^1$

при $n=5$

$(n-1)!+1=25=5^2$

Пусть n составное тогда по теореме Вильсона

$(n-1)!+1 \not\vdots\, n$ это не подходит под условие задачи, так как степень числа n делится на n

Значит n - простое

$(n-1)!+1=n^k \quad k\in\mathbb{N}$

$(n-1)!=n^k-1 \quad \Big| \vdots\, n-1$

$(n-2)!=\sum\limits_{i=0}^{k-1} n^i$

$n-1$ составное не равное 4 для всех простых n больше 5, так в этом случае n нечетное и $n-1$ четное больше 4 то есть составное. Тогда по нашей лемме

$(n-2)! \vdots$ на $n-1$ $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{k-1} n^i \,\vdots\, n-1$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^{k-1} n^i$$

по теореме Безу

$$P(n) = (n-1)\,Q(n) + P(1) \Rightarrow$$

$$P(1) \,\vdots\, n-1$$

$$P(1) = 1+1+1^2+\ldots+1^{k-1} = k$$

$$k \,\vdots\, n-1 \Rightarrow k \ge n-1$$

$$n^k - 1 \ge n^{n-1} - 1 \Rightarrow (n-1)! \ge n^{n-1} - 1$$

$$(n-1)! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n-1 \le \underbrace{n-1\cdot\ldots\cdot n-1}_{n-1} < (n-1)^{n-1}$$

$$(n-1)^{n-1} \ge n^{n-1} - 1 = ((n-1)+1)^{n-1} - 1 =$$

$$(n-1)^{n-1} + (n-1)\cdot(n-1)^{n-2} + C_{n-1}^{2}\cdot(n-1)^{n-3} + \ldots$$

$$+ C_{n-1}^{n-2}(n-1) + 1 - 1 \ge (n-1)^{n-1} + (n-1)\cdot(n-1)^{n-2} =$$

$$2(n-1)^{n-1} - 1$$

$$(n-1)^{n-1} \ge 2(n-1)^{n-1} - 1$$

$$(n-1)^{n-1} \le 1$$

что неверно для $n \ge 2$

Значит нам подходят ~~те~~ значения n равные 2, 3, 5