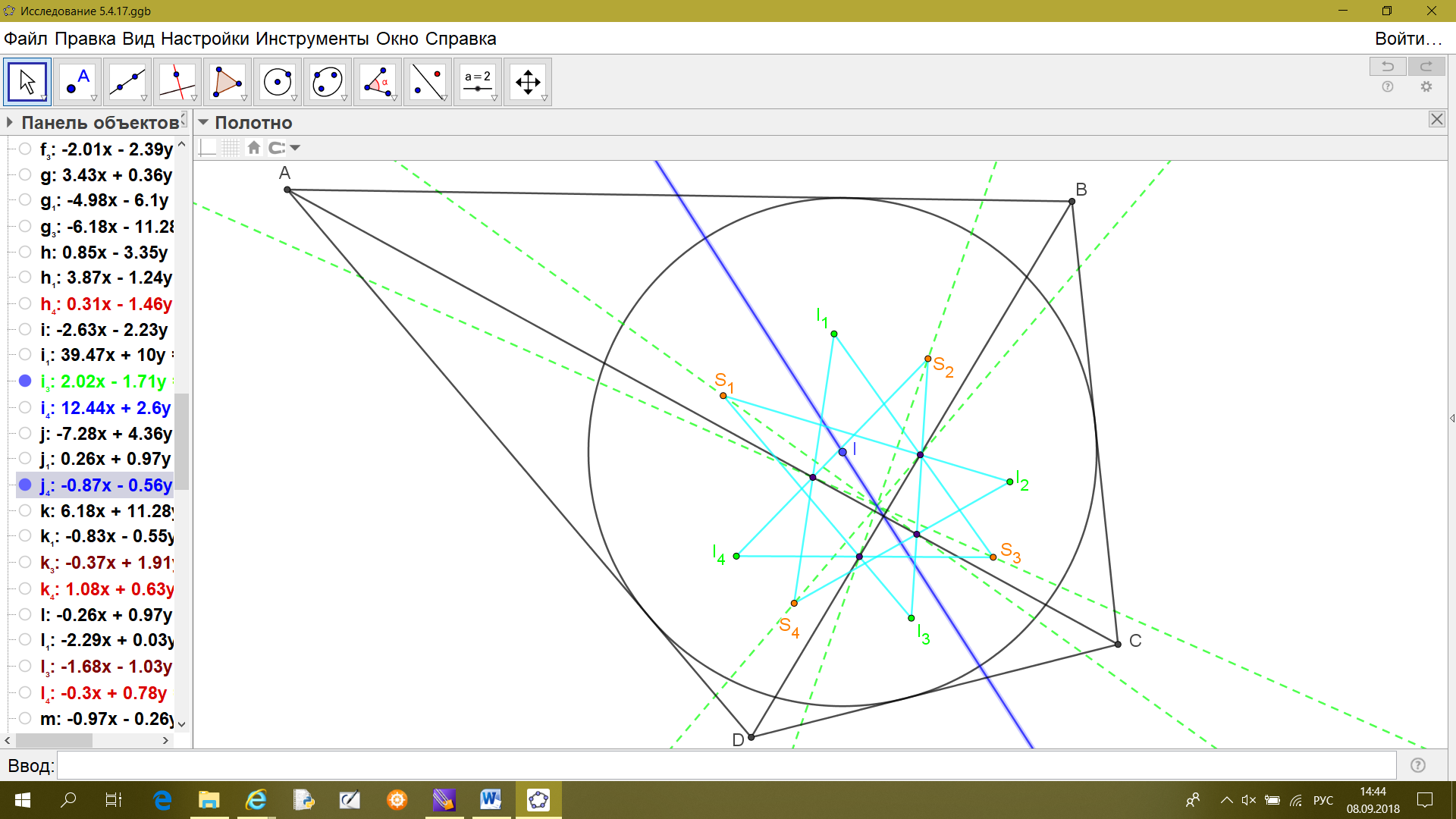
Изогональное сопряжение в четырехугольнике

**Автор: Уткин Андрей**

**ГБОУ «Школа Глория», МФТИ ФФКЭ, 1 курс.**

В работе исследуются свойства описанного четырехугольника. Основным инструментом является теорема об изогональном сопряжении в четырехугольнике.



Оглавление

[Введение 2](#_Toc524539629)

[Базовые факты и теоремы. 3](#_Toc524539630)

[Некоторые свойства описанного четырехугольника 5](#_Toc524539631)

[Приложение 1. Доказательство базовых фактов и теорем. 14](#_Toc524539632)

[Приложение 2. 16](#_Toc524539633)

[Благодарности. 17](#_Toc524539634)

[Литература. 17](#_Toc524539635)

# Введение

**Обозначения:**

* В четырехугольнике ABCD I – центр вписанной окружности, S – точка пересечения диагоналей;
* Центры вписанных окружностей ΔASB, ΔBSC, ΔCSD, ΔDSA – IAB, IBC, ICD, IDA соответственно;
* Центры вписанных окружностей ΔDAB, ΔABC, ΔBCD, ΔCDA – SA, SB, SC, SD соответственно;
* IABSD ∩ IDASB = FA, IABSC ∩ IBCSA = FB, IBCSD ∩ ICDSB = FC, ICDSA ∩ IDASC = FD.

**Основные результаты:**

1. Обозначим через lBC общую внешнюю касательную вписанных окружностей ΔABC и ΔBCD, отличную от BC. Аналогично определим lAB, lCD, lDA. Тогда прямые lBC, lCD и AC пересекаются в одной точке;
2. Точка пересечения прямых SAFC, SCFA, SBFD, SDFB существует и лежит на прямой IS.

**Структура работы:**

В разделе «Базовые факты и теоремы» приводятся те утверждения, которые будут использованы в основной части работы в качестве лемм. Их доказательство приведено в приложении 1.

Раздел «Некоторые свойства описанного четырехугольника» содержит ряд утверждений, последовательно приводящих к доказательству тех свойств, которым посвящена работа.

Зеленым цветом выделено указание на источники.

Желтым цветом отмечены факты и теоремы.

Красным цветом выделены наиболее значимые утверждения и результаты.

# Базовые факты и теоремы.

**Теорема об изогонально сопряженных точках в треугольнике**

В треугольнике ABC точки P и Q таковы, что ∠BAP = ∠CAQ, ∠ABP = ∠CBQ. Тогда ∠ACP = ∠BCQ.

Несколько различных доказательств см. в [3]

**Теорема об изогоналях**

Через точку O проходят 4 прямые l1, l2, l3, l4, причем l2 и l3 симметричны относительно биссектрисы (любой) ∠(l1, l4). Пусть на них выбрано по одной точке – A, B, C, D соответственно. Пусть P = AB ∩ CD, Q = AC ∩ BD. Тогда прямые OP и OQ симметричны относительно биссектрисы ∠(l1, l4).

Доказательство и подборку задач см. в [4]

**Изогональное свойство эллипса**

Пусть касательные к эллипсу с фокусами FA и FB, восстановленные в точках M и N пересекаются в точке P, то ∠MPFA = ∠MPFB.

Док-во см. в [1] (стр. 15).

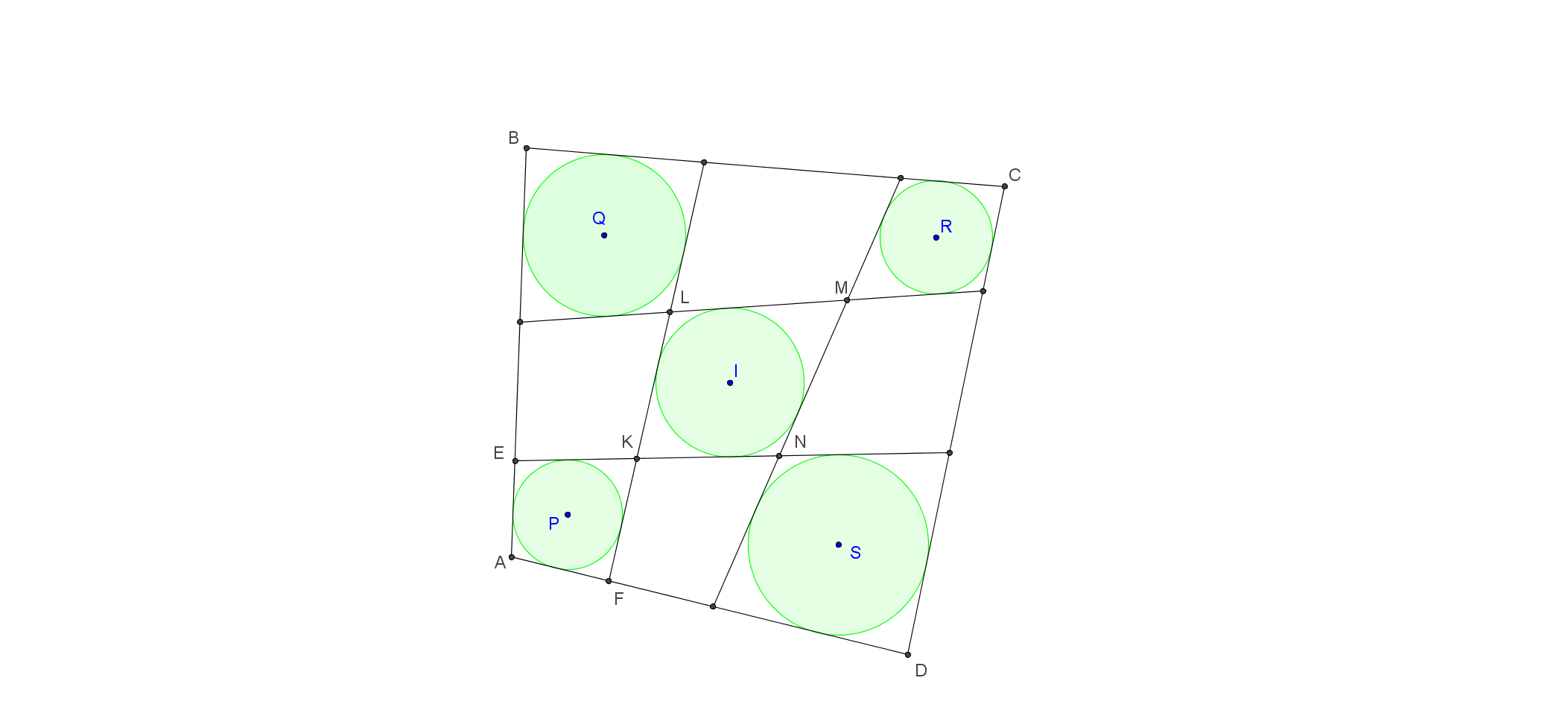
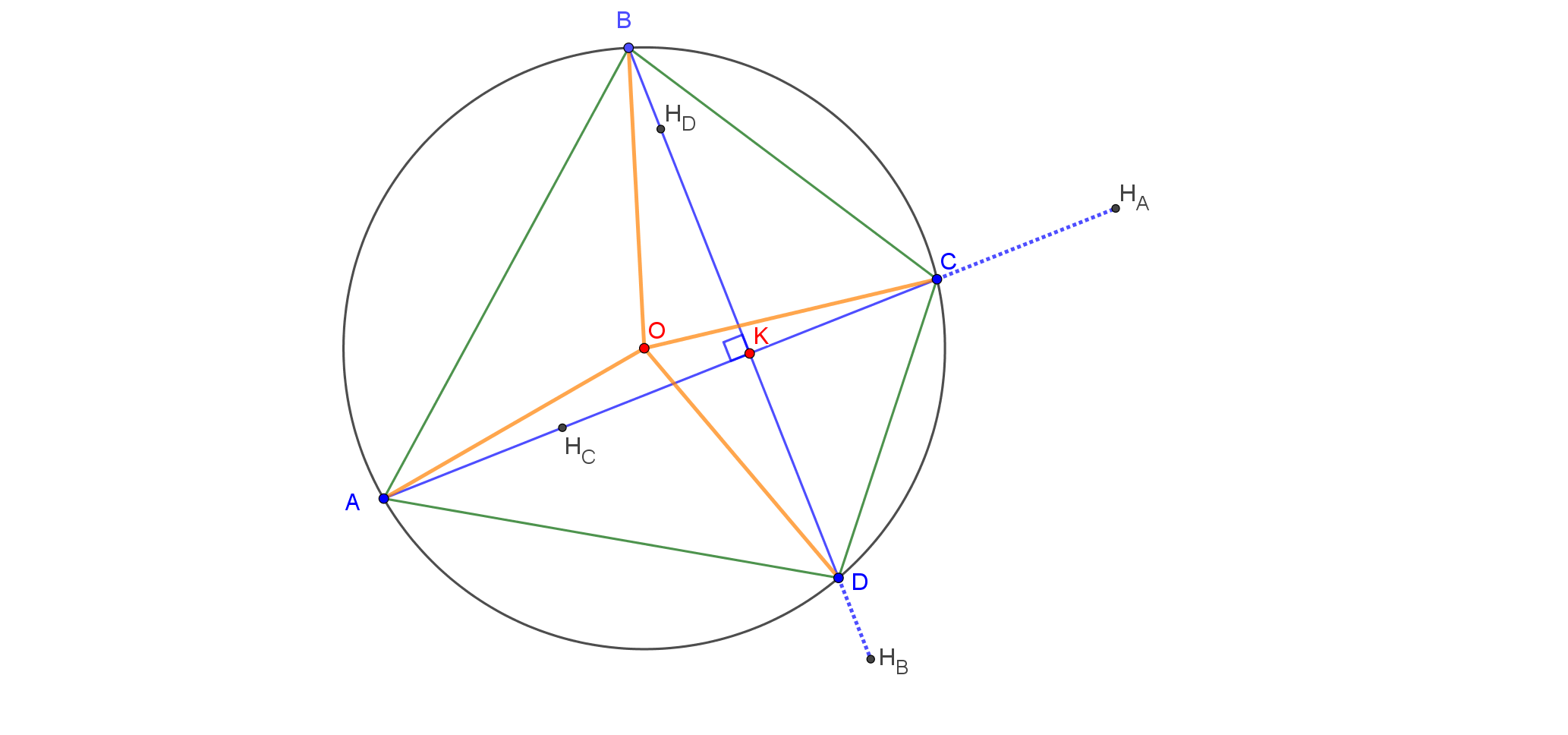
**Теорема 1**

Если в четырехугольнике ABCD точки P и Q изогонально сопряжены, то для ориентированных углов ∠APB + ∠CPD = 180° и ∠AQB + ∠CQD = 180°.

**Следствие из теоремы 1**

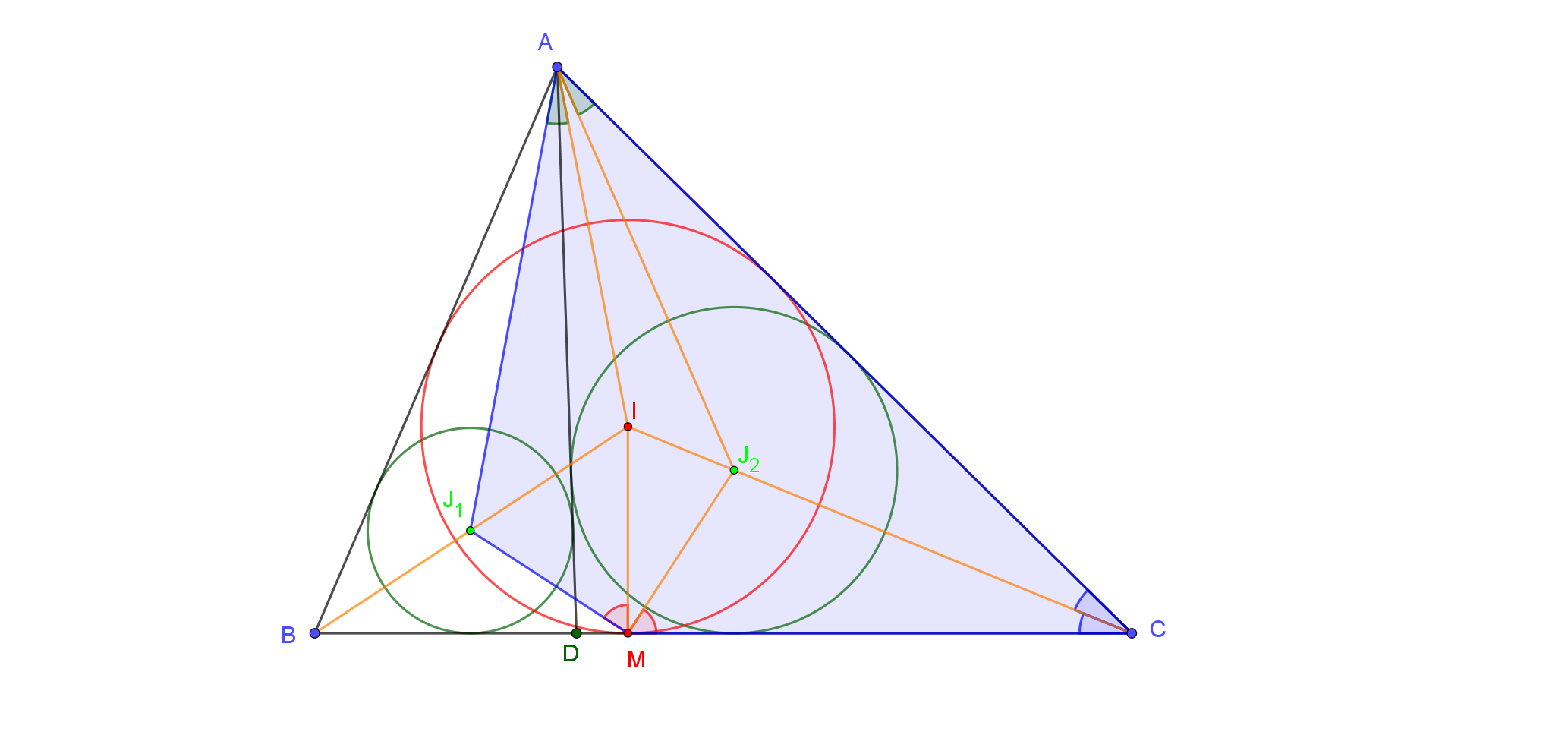
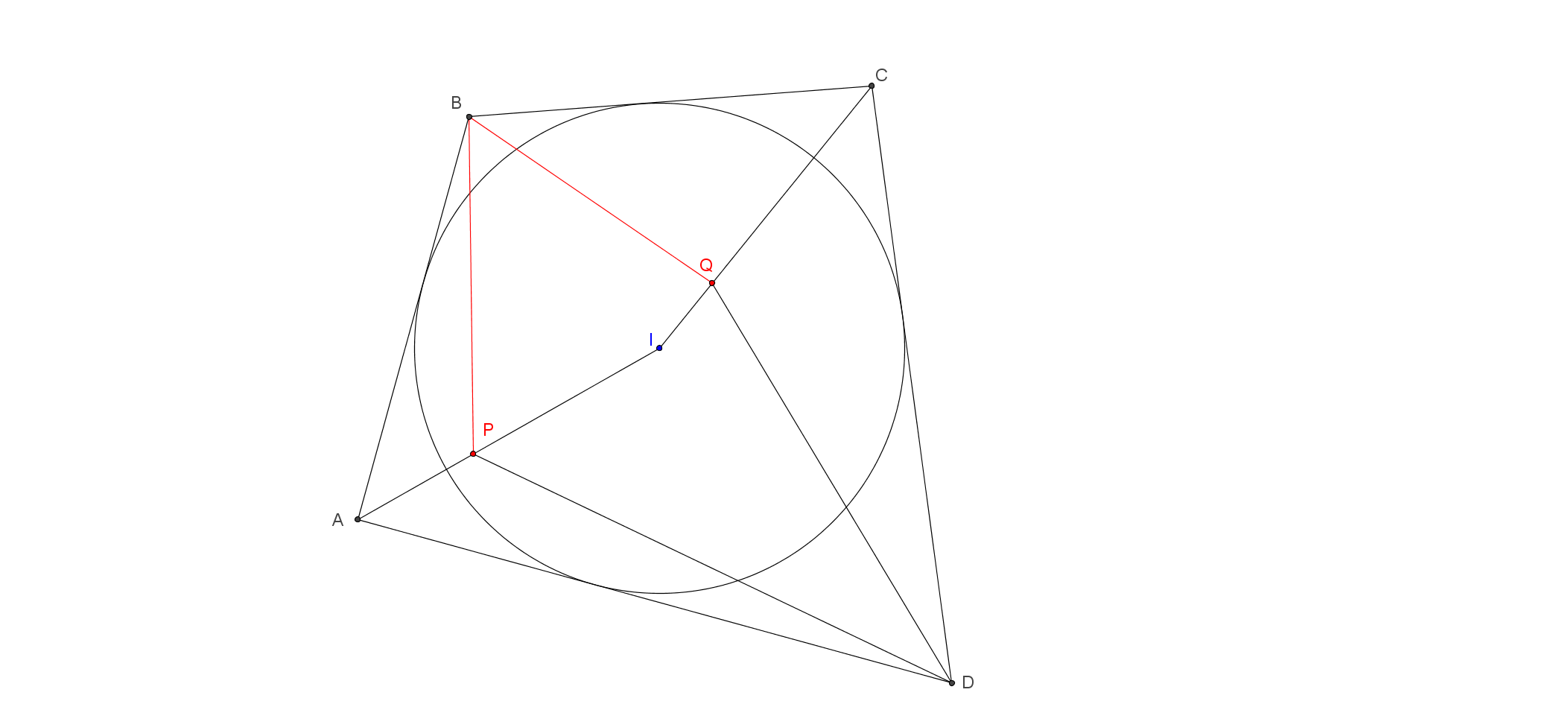
Пусть в четырехугольнике ABCD P такова, что ∠APB + ∠CPD = 180°. Тогда для нее существует изогонально сопряженная точка.

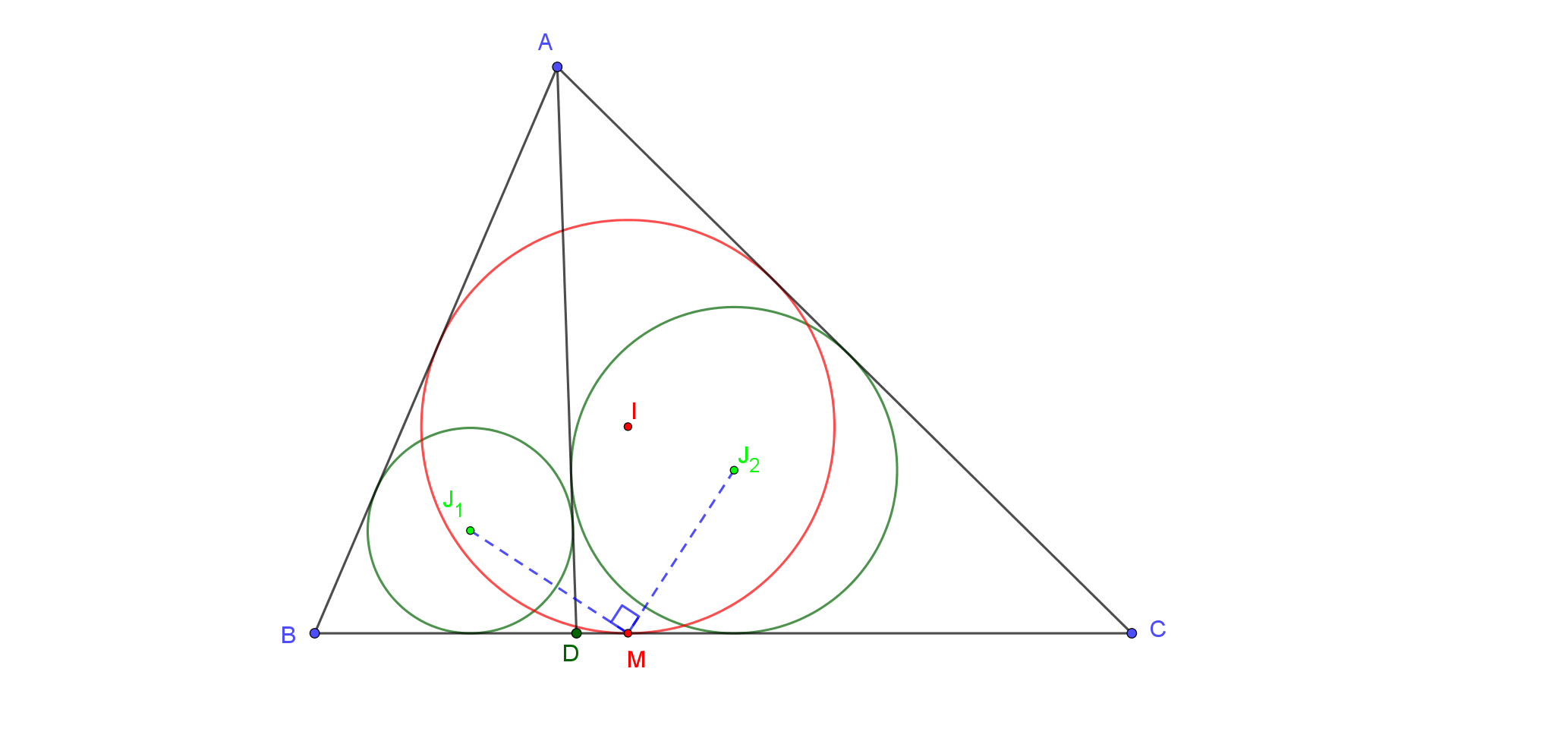
**Факт 1**. Центр описанной окружности четырехугольника ABCD с перпендикулярными диагоналями изогонально сопряжен в нем точке пересечения диагоналей.



**Факт 2**. Четырехугольник делится на 9 выпуклых четырехугольников 2 прямыми, соединяющими AB и CD, и двумя прямыми, соединяющими BC и AD. Угловые и центральный четырехугольники описанные. Тогда исходный четырехугольник описанный.

**Факт 3**. I – центр вписанной в ABCD окружности. На отрезках AI и CI выбраны точки M и N. Причем ∠MBN = ½ ∠ABC. Тогда ∠MDN = ½ ∠ADC.





**Факт 4**. (И. Ф. Шарыгин) В треугольнике ΔABC на стороне BC выбрана точка D. Окружности с центрами J1 и J2 вписаны в треугольники ΔABD и ΔACD. Пусть M – точка касания вписанной окружности ΔABC со стороной BC. Тогда ∠J1MJ2 = 90°.

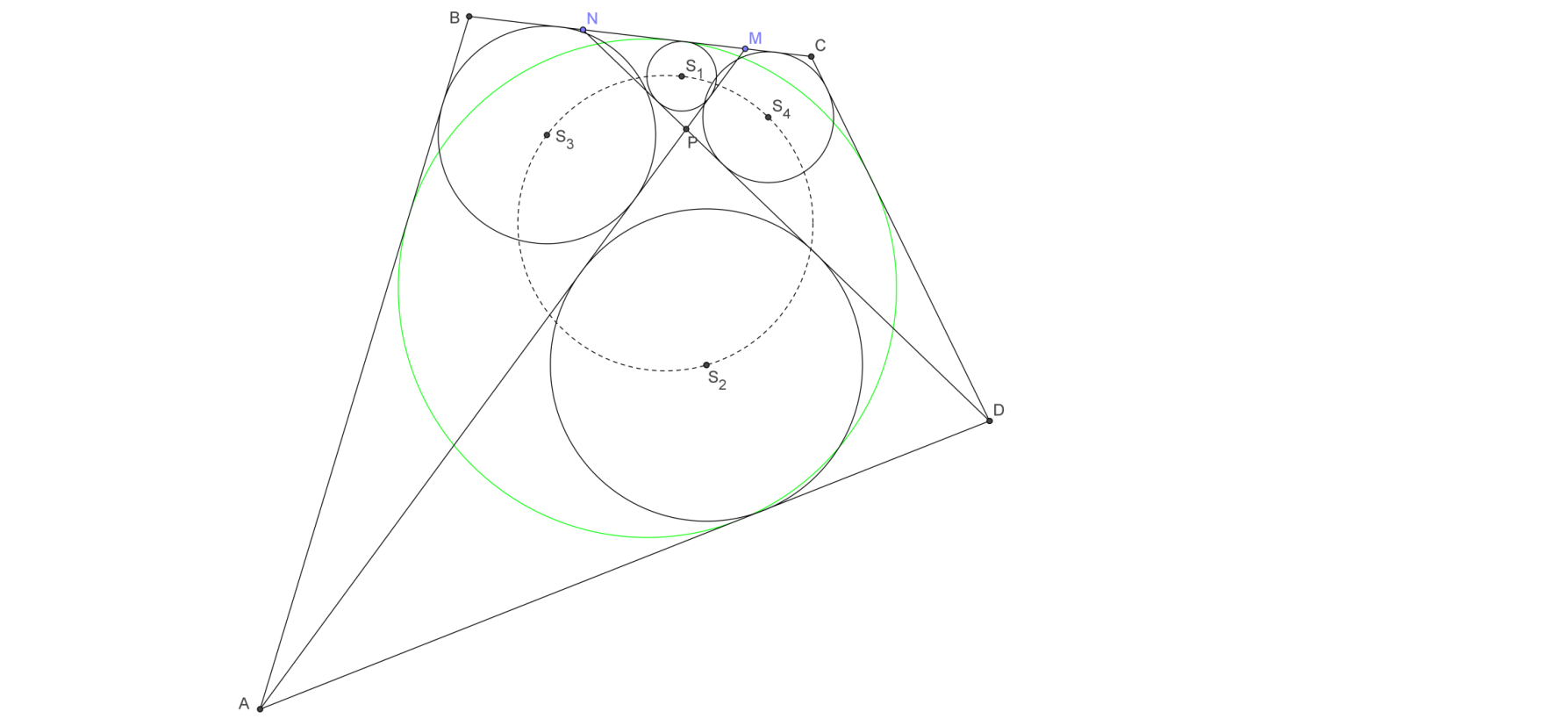
Этот факт является частным случаем факта 3.

# Некоторые свойства описанного четырехугольника

1[[1]](#footnote-1). В описанном четырехугольнике ABCD проведены пересекающиеся в точке P отрезки AM и DN, где M и N лежат на стороне BC. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности с центрами SA, SB, SC и SD соответственно. Доказать, что эти центры лежат на одной окружности.

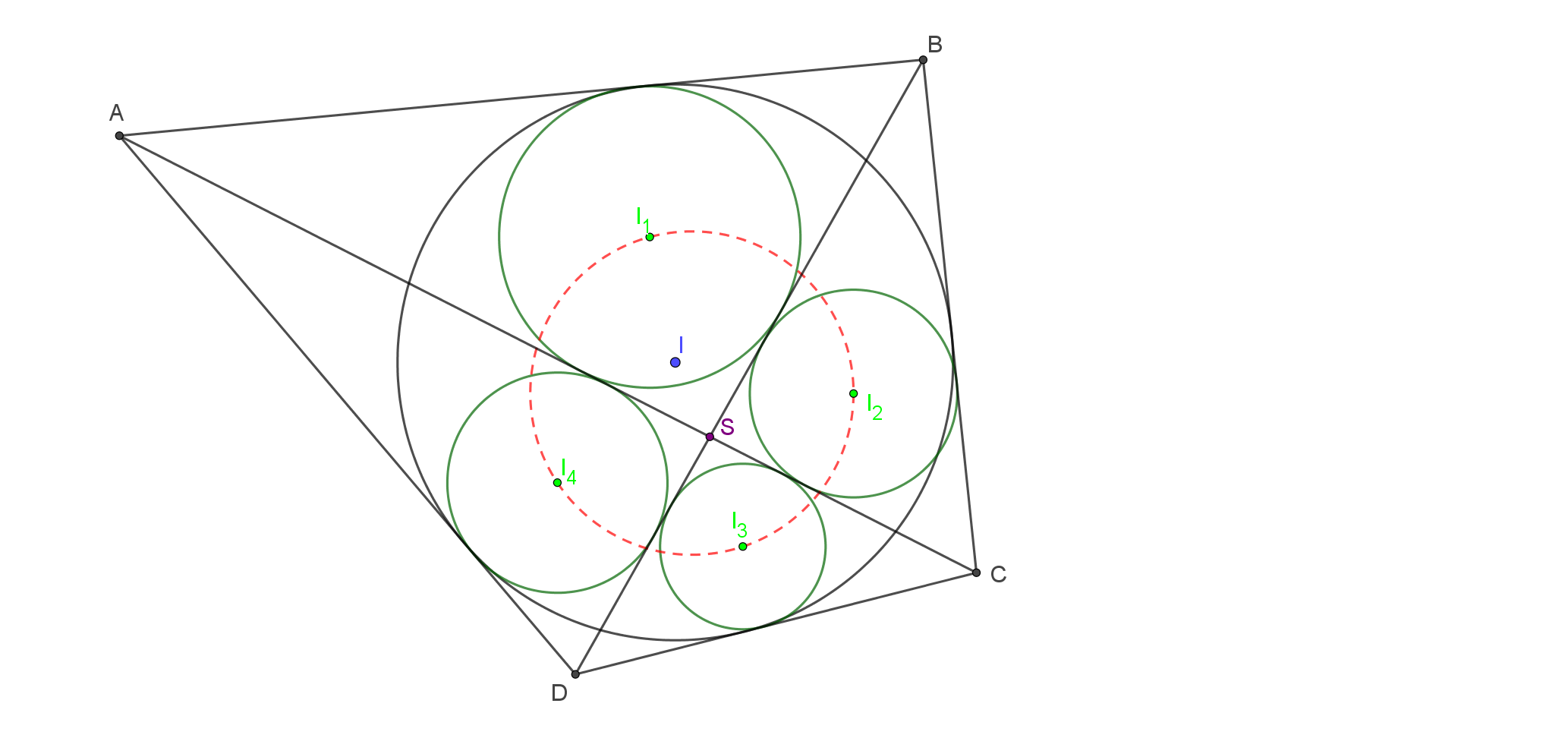
∠BIC + ∠AID = 180°, где I – центр вписанной в четырехугольник ABCD окружности. Заметим, что ∠SCAI = ∠SBAD и ∠SDDI = ∠SBDA, так как ASC, ASB, AI – биссектрисы углов ∠BAM, ∠DAM, ∠BAD, и аналогично DSD, DSB, DI – биссектрисы углов ∠CDN, ∠ADN, ∠CDA.

Рассмотрим четырехугольник ASCSDD. В нем SB и I изогонально сопряжены. Значит, по [*теореме 1*](#Т1) ∠ASBD = 180° – SCSBSD. Так как ∠MSAN = 90° + ½ ∠MPN = ∠ASBD, SASCSBSD – вписанный.

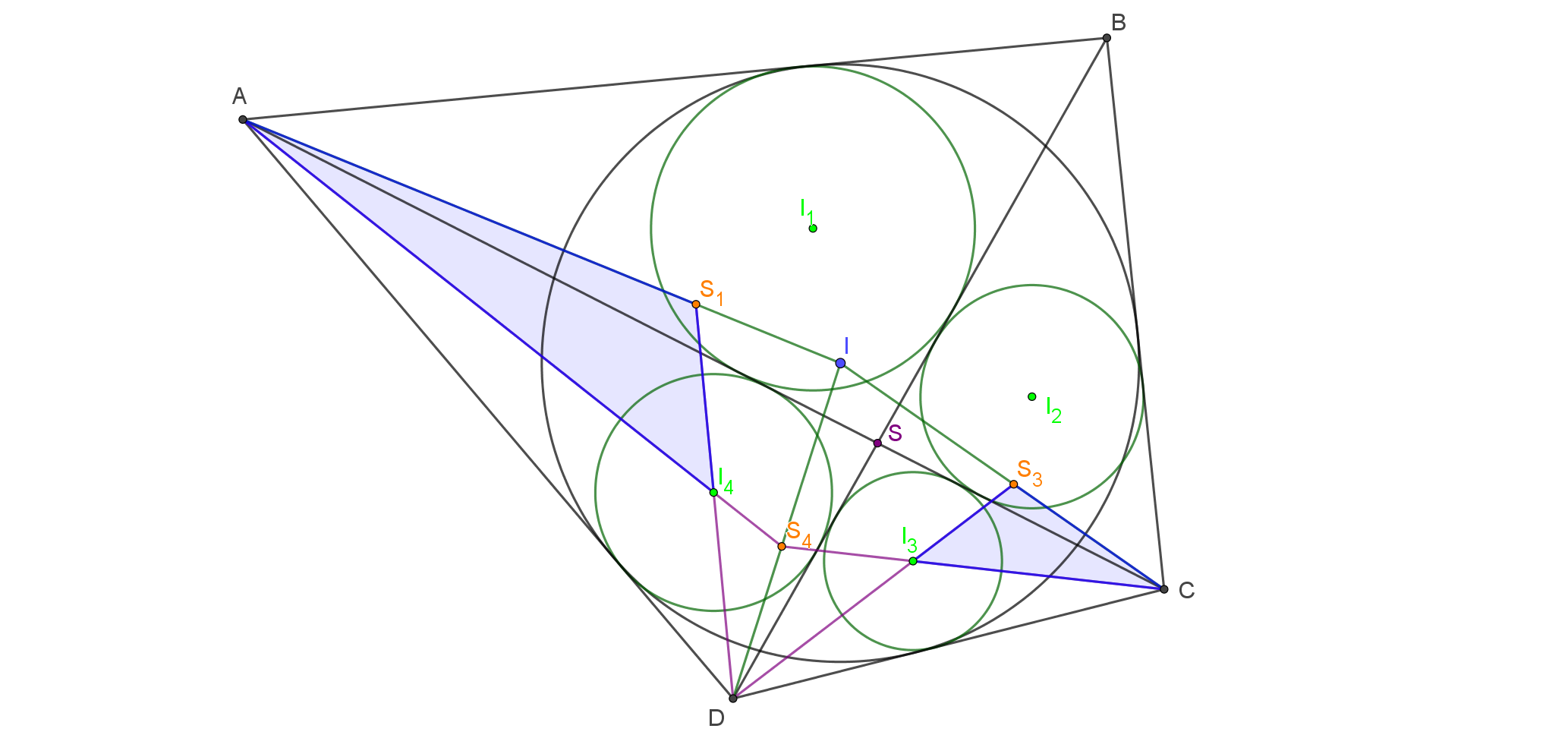


Можно заметить, что, рассматривая прямые AD, AM, ND, касательную к окружностям с центрами в SC и SD, получим частный случай [*факта 2*](#Ф2), где 2 окружности вырождаются в точки. Поэтому касательная к окружностям с центрами в SC и SD, AP, DP и AD, образует описанный четырехугольник. Таким образом, существует прямая, касающаяся одновременно окружностей, вписанных в треугольники APD, ABM и DCN. Эти доказательства эквивалентны.

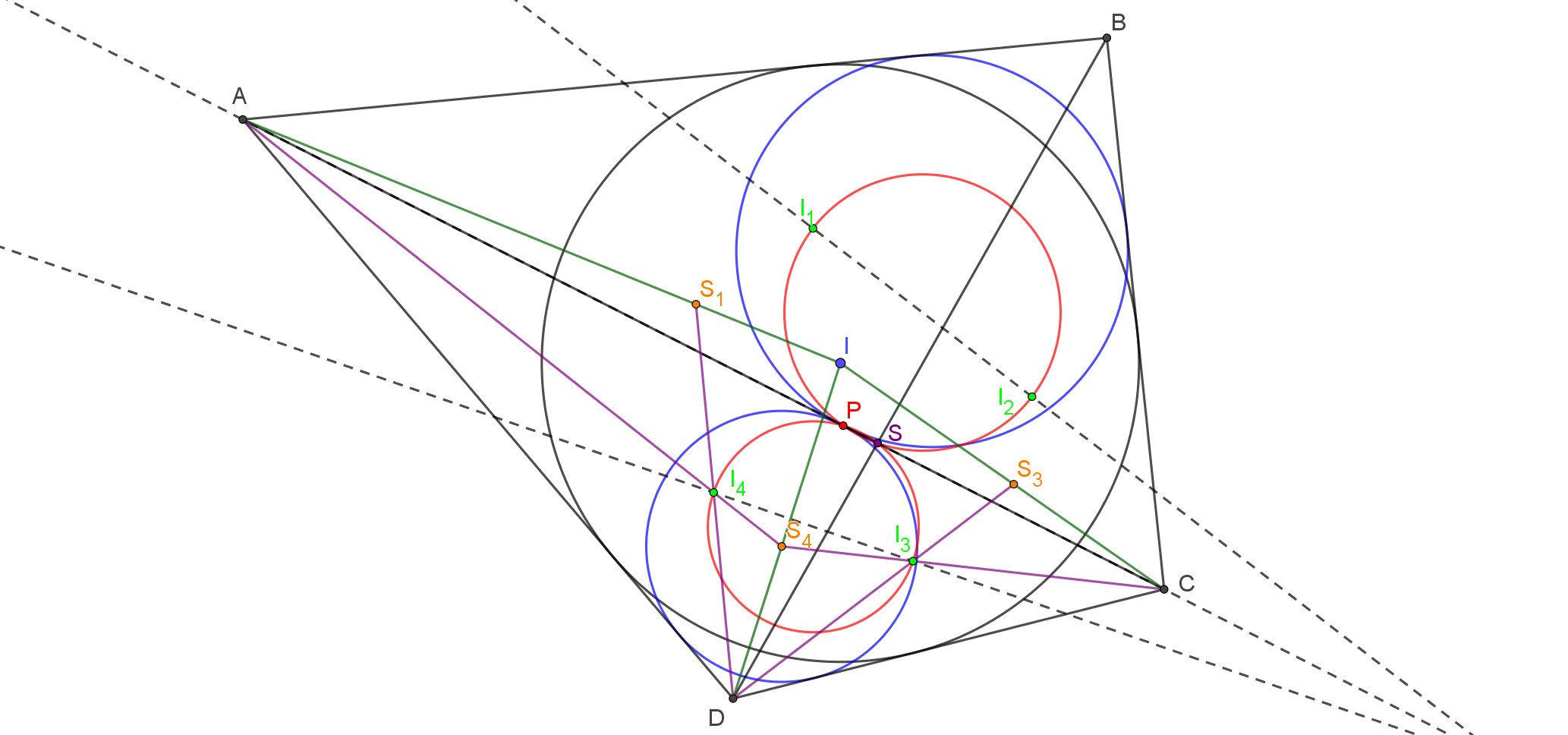
2. Диагонали описанного четырехугольника ABCD пересекаются в точке S. Центры вписанных окружностей ΔASB, ΔBSC, ΔCSD, ΔDSA – IAB, IBC, ICD, IDA соответственно. Тогда четырехугольник IABIBCICDIDA вписанный. ([2], 5.4.17, [5])



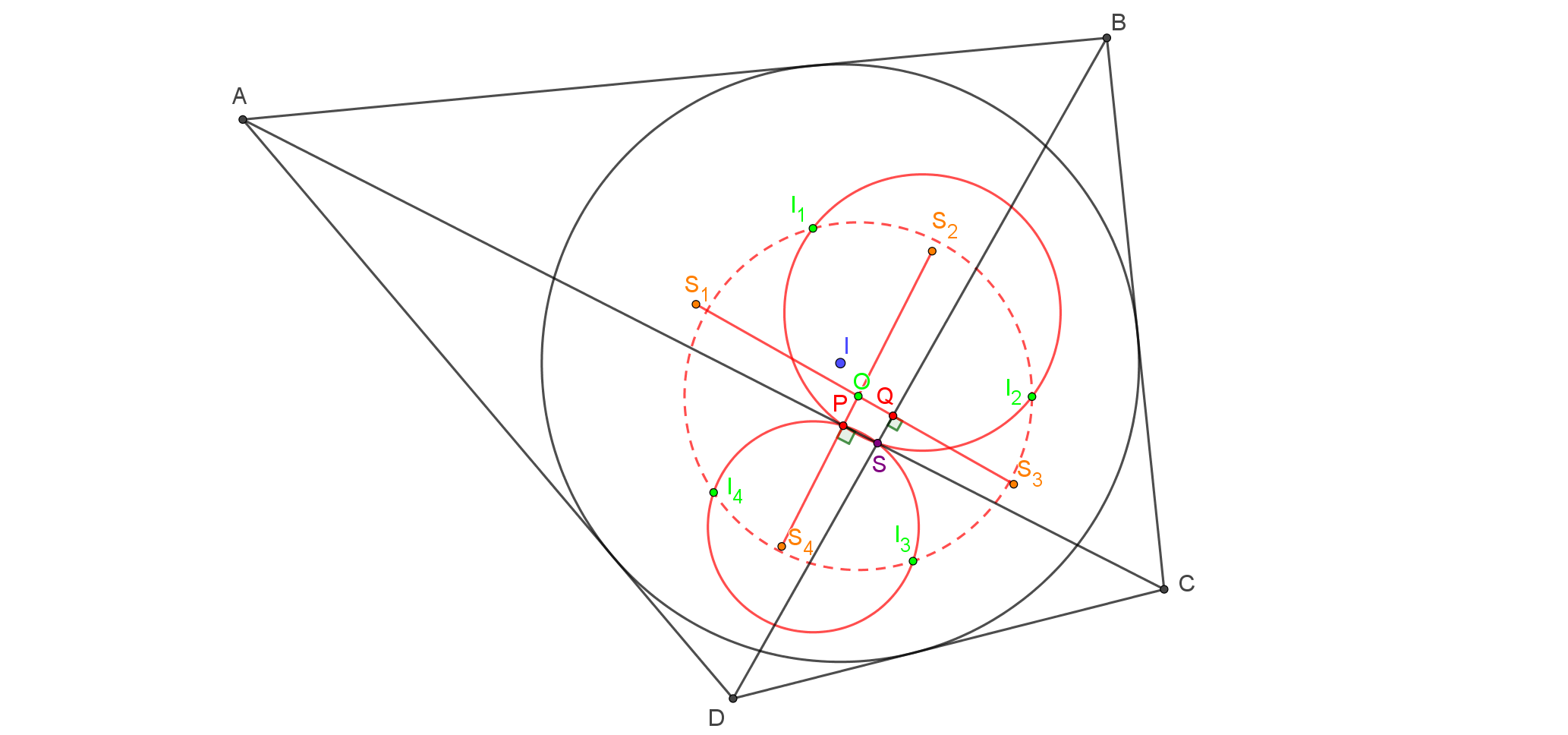
Пусть SA, SB, SC, SD – центры вписанных окружностей треугольников ΔDAB, ΔABC, ΔBCD, ΔCDA. Рассмотрим треугольники ΔASAIDA, ΔCSCICD. По теореме, обратной к теореме Дезарга, прямые AC, SASC, ICDIDA пересекаются в одной точке. Аналогично AC, SASC, IABIBC пересекаются в одной точке. Значит, ICDIDA, IABIBC и AC пересекаются в одной точке (обозначим ее U).



Вписанные окружности ΔABC и ΔADC касаются диагонали в одной точке (известный факт). Используем [*факт 4*](#Ф4): точки ICD, IDA, S, P лежат на одной окружности, как и точки IAB, IBC, S, P. IABIBCICDIDA – вписанный.



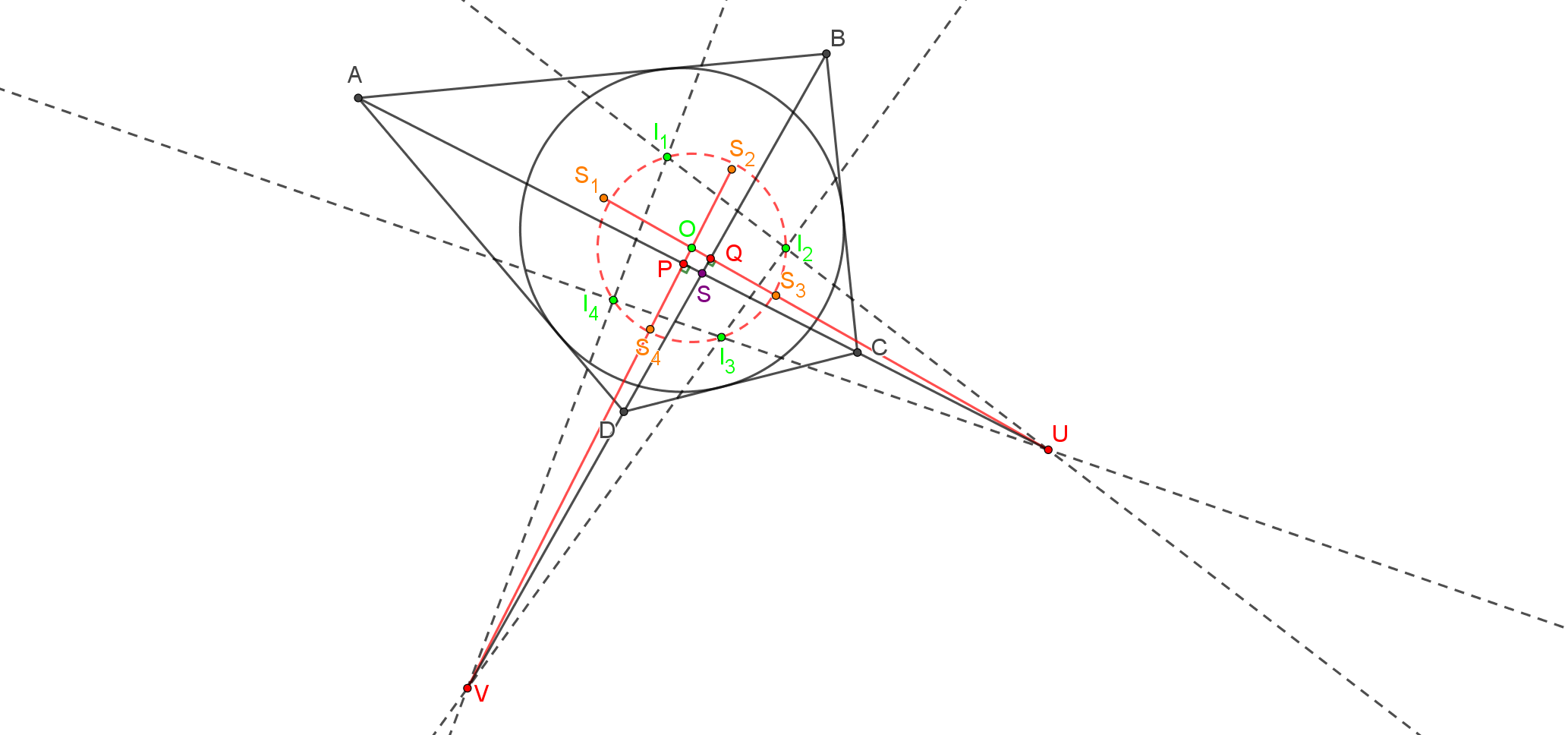
3. P и Q изогонально сопряжены в четырехугольнике IABIBCICDIDA.



∠QIABIDA = ∠IDASD = ½ ∠ASD, ∠PIABIBC = ∠IBCSC = ½ ∠BSC. Аналогично для других углов четырехугольника.

4[[2]](#footnote-2). Доказать, что точка пересечения SASC и SBSD (O) является центром описанной окружности IABIBCICDIDA.

Пусть точки пересечения SASC и AC, SBSD и BD – U и V соответственно. Как было показано выше, U = IABIBC ∩ ICDIDA, V = IABIDA ∩ IBCICD. Рассмотрим четырехугольник IABIBCICDIDA. Рассматриваем в нем 2 пары изогонально сопряженных точек: (P, Q), (U, V) (!). По [*теореме об изогоналях*](#ТИ) для каждого угла четырехугольника, O и S изогонально в нем сопряжены. Но S – точка пересечения перпендикулярных диагоналей вписанного четырехугольника. Значит, O – центр описанной окружности IABIBCICDIDA ([*факт 1*](#Ф1)).

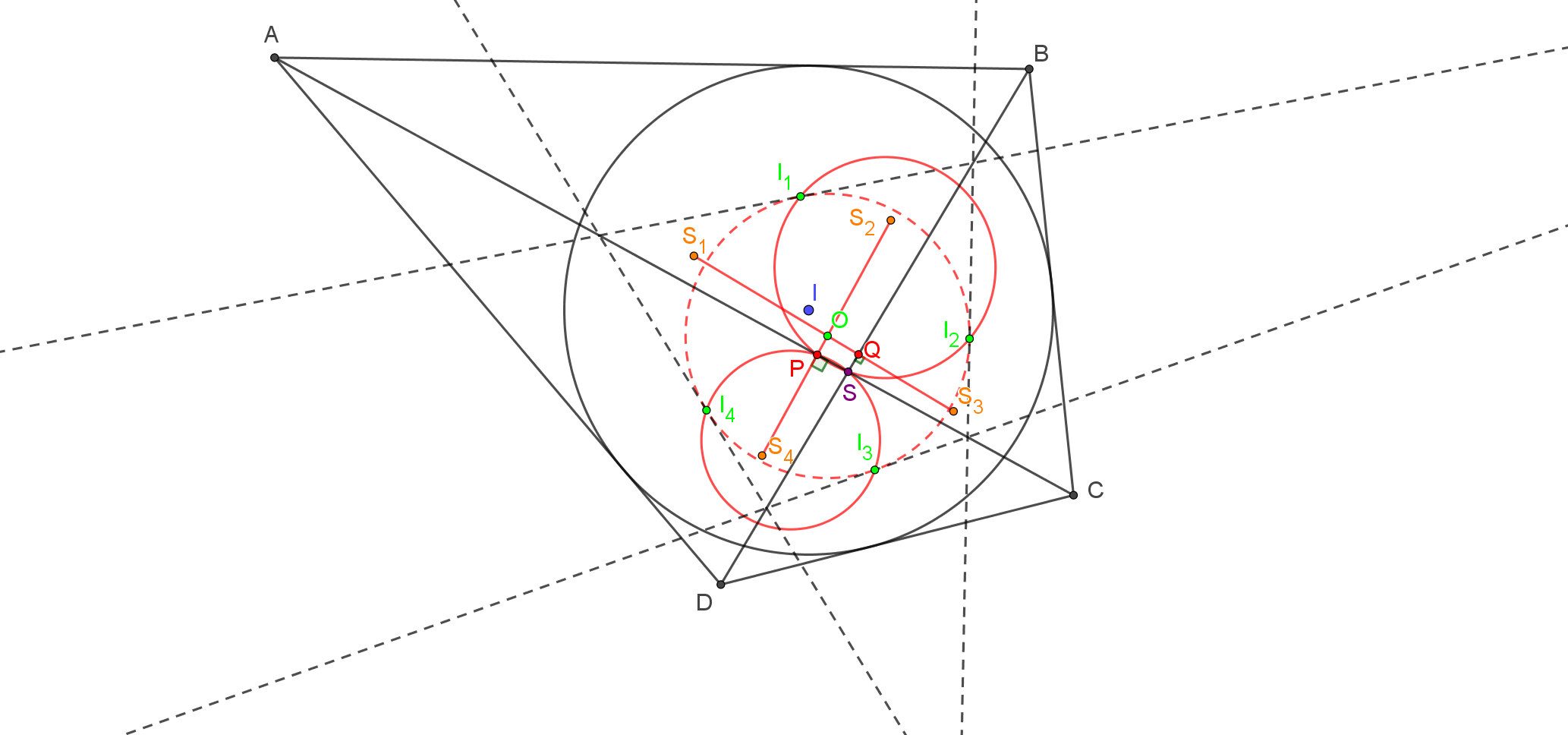


Хочу отметить такой факт: UV⏊OS, так как UV – поляра точки S для окружности, описанной около IABIBCICDIDA. В дальнейшем он использоваться не будет.

5[[3]](#footnote-3). Касательные к описанной окружности IABIBCICDIDA, восстановленные в 2 циклически последовательных точках, пересекаются на одной из диагоналей четырехугольника ABCD.

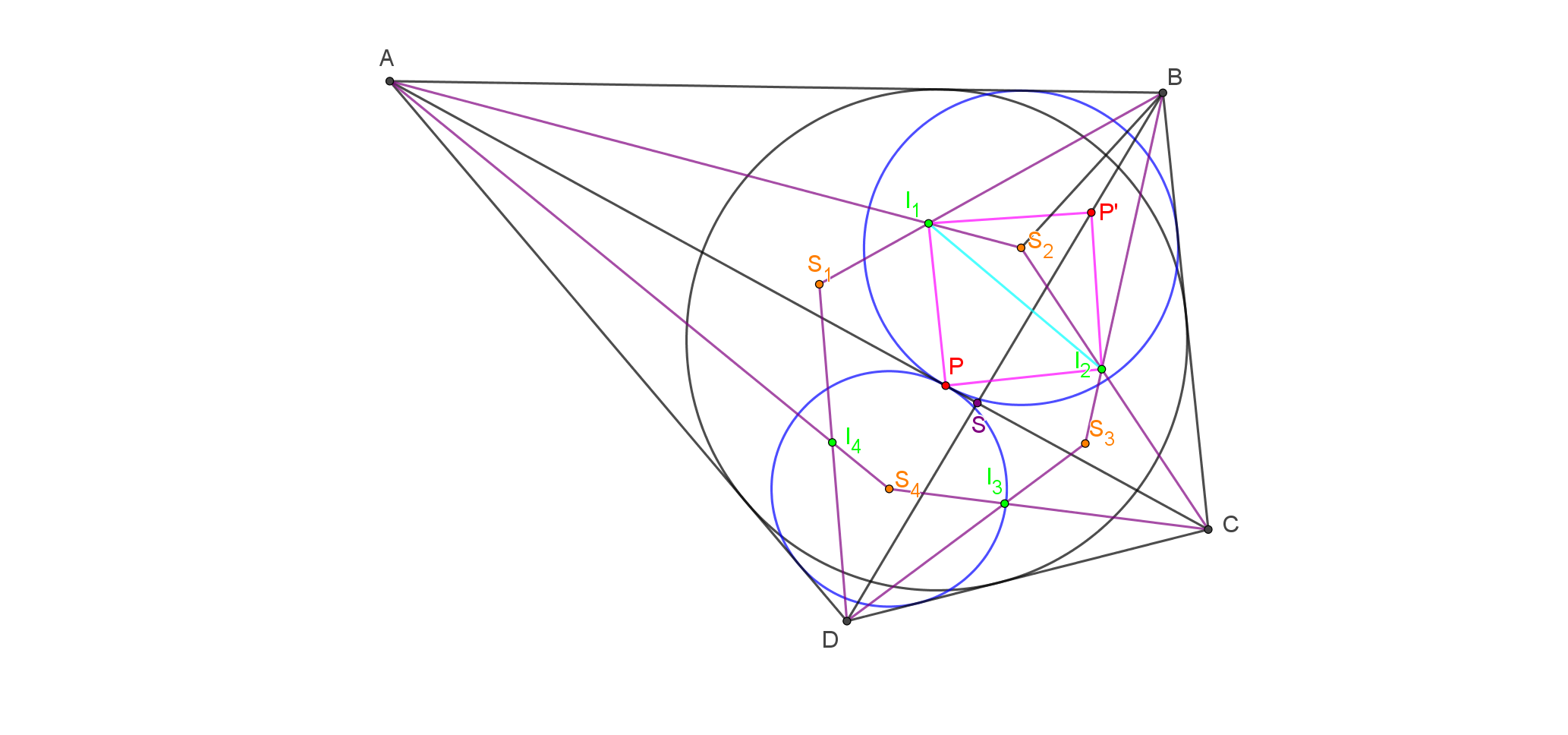
Заметим, что P – середина хорды, высекаемой на окружности диагональю AC. Кроме того, ∠IABPA = ∠IABIBCIDA = ∠IABICDIDA = ∠IDAPA. Проведем срединный перпендикуляр к IABIDA. Пусть он пересечет AC в точке X. Тогда точки IAB, IDA, P, O, X лежат на одной окружности, так как ∠IABPX = ∠IABIBCIDA = ∠IABOX, ∠IDAPX = ∠IABICDIDA = ∠IDAOX. Так как OX – диаметр, XIAB и XIDA – касательные. Это и требовалось доказать.

Верен факт, что точка пересечения касательных к окружности из точек IAB и IDA (K1,4 := X) и SA изогонально сопряжены в треугольнике ΔAIABIDA. Это следует из равенства ∠SAIABA = 90° – ½ ∠ASB = ∠IDASA = ∠IDAICDIAB = ∠IDAIABK1,4 = ∠IABIDAK1,4 = ∠SAIDAA.



6. Доказать, что отражения точки P относительно прямых IABIBC и ICDIDA лежат на диагонали BD.

Пусть P’ (в [*Таблице 1*](#Таблица_1) обозначено симметрично) – отражение P относительно IABIBC. Тогда ∠BIABSB = 90° – ½ ∠ASB = ∠BSIBC = ∠PIABIBC = ∠P’IABIBC и, аналогично, ∠BIBCSB = ∠P’IBCIAB. Значит, точки SB и P’ изогонально сопряжены в ΔBIABIBC. Но прямая BD изогонально сопряжена BSB в ∠IABBIBC, ∠IABBSB = ½ (∠ABC – ∠ABD), а ∠IBCBD = ½ ∠CBD, но ∠ABC – ∠ABD = ∠CBD. Таким образом, этот факт доказан.



7. 1. Прямые IABSD и IDASB пересекаются на диагонали AC.

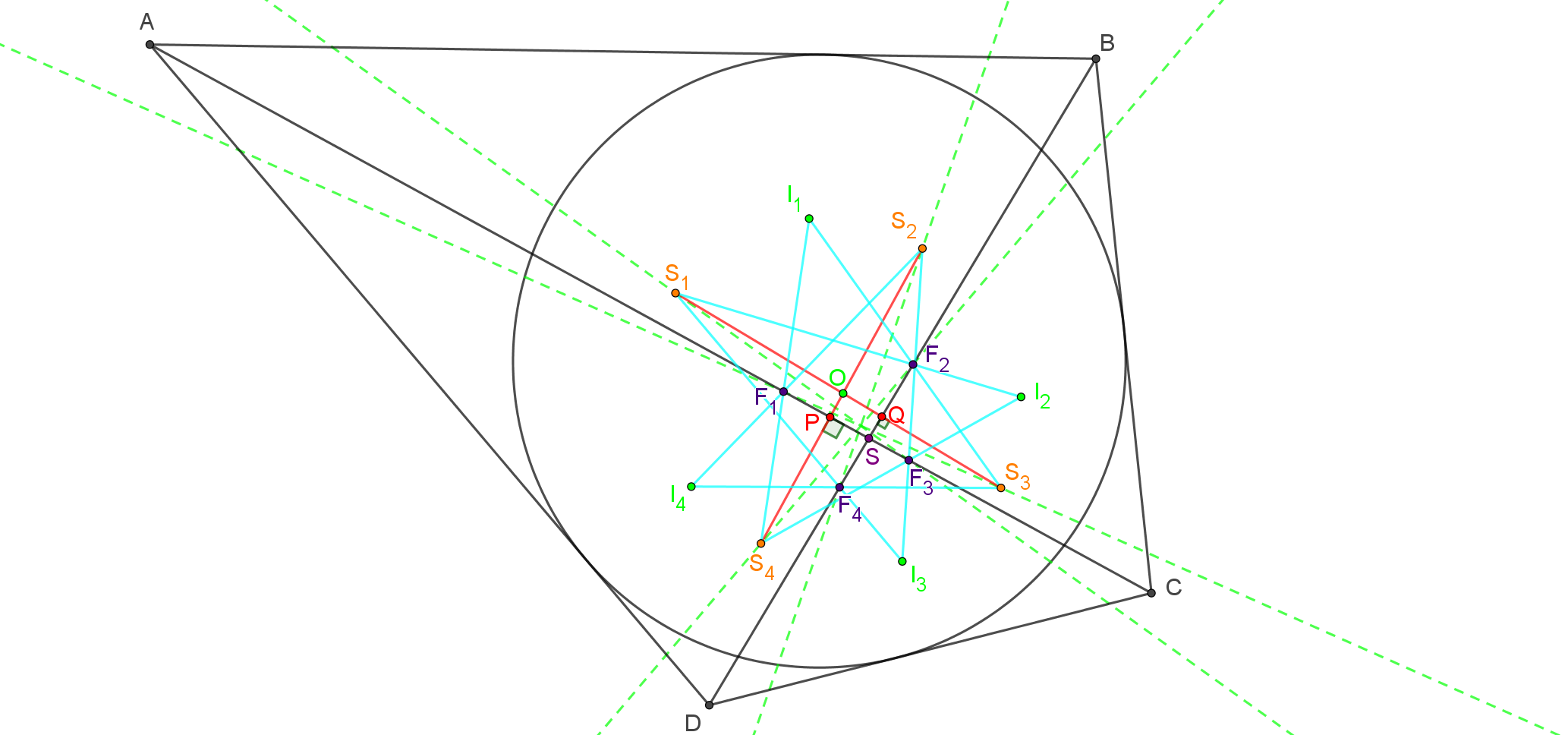
Заметим, что в треугольнике SDASB AP – высота, а ∠APIAB = ∠APIDA. По теореме Бланшета прямые IABSD и IDASB пересекаются на высоте AP.

**Обозначим** IABSD ∩ IDASB = FA, IABSC ∩ IBCSA = FB, IBCSD ∩ ICDSB = FC, ICDSA ∩ IDASC = FD.

7. 2. Верны следующие 3 факта (и аналогичные им):

1) В ΔIABSDIBC FB и P изогонально сопряжены, так как ∠SDIABSC = 180° – ∠SDICDSC = 90° – ½ ∠DSC = ½ ∠BSC = ∠PIABIBC (IABSDICDSC – вписанный, используя [*задачу 1*](#п_1)), аналогично ∠SDIBCSA = ∠IABIBCP;

2) Точки FB и SB изогонально сопряжены в четырехугольнике SDIABBIBC, так как ∠IABSDSB = ∠IBCSDFB ([*из 1*](#п_1)), ∠SDIABIBC = ∠PIABIBC = ½ ∠BSC = ∠BIABSB, ∠SDIBCFB = ∠BIBCIAB, ∠IABBSB = ∠IBCBFB.



3) Прямые FBSD и BD – изогонали в ∠SAFBSC. Следует из пункта [*2)*](#п_7_2_2) и [*теоремы об изогональных точках в четырехугольнике*](#Т1).

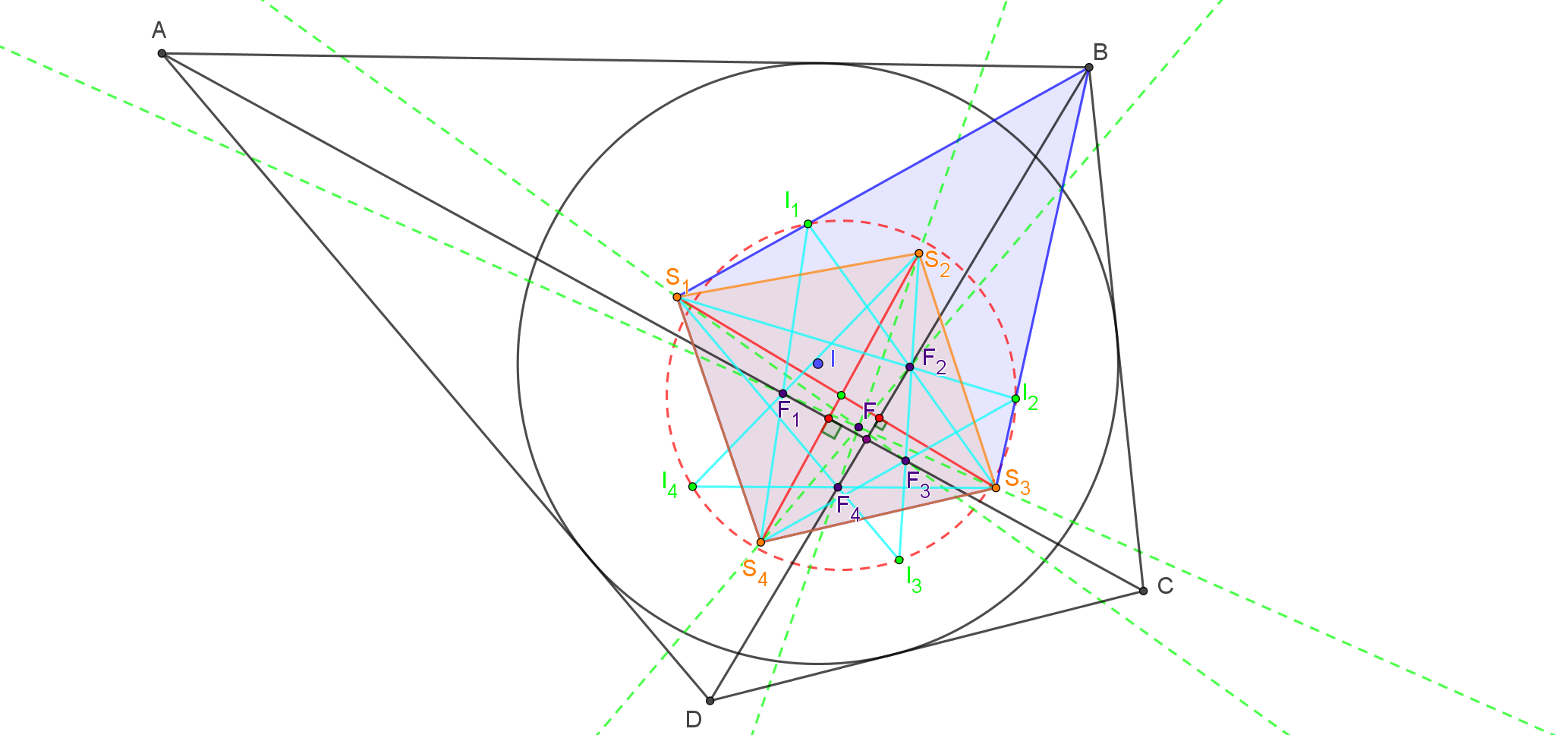
7. 3. Прямые FASC, FBSD, FCSA, FDSB пересекаются в одной точке.

Мы установили, что FBSD и BD – изогонали в ∠SAFBSC и FDSB и BD – изогонали в ∠SAFDSC. Кроме того, ∠SAQFB = ∠SCQFD = 90°, поэтому в четырехугольнике SAFBSCFD для точки Q существует изогонально сопряженная точка, которая и есть точка пересечения FASC, FBSD, FCSA, FDSB. Обозначим эту точку F.

Как следствие, ∠SAFFB +∠SCFFD = 180°.

8. 1. I и F изогонально сопряжены в SASBSCSD.

Согласно пункту [*7. 2. 2)*](#п_7_2_2), ∠SASBI = 180° – ∠SASBB = ∠FDSBSC. Аналогично ∠SBSCI = ∠FASCSD, ∠SCSDI = ∠FBSDSA и ∠SDSAI = ∠FCSASB. Поэтому I и F изогонально сопряжены в SASBSCSD.



Стоит заметить, что точки I и FB изогонально сопряжены в четырехугольнике SABSCSD, так как ∠SAIB + ∠SCISD = 180°, BI и BFB – изогонали в ∠SABSC, а SDI и SDFB – изогонали в ∠SASDSC.

Кроме того, в треугольнике ΔBSBFD точки SA и SC изогонально сопряжены.

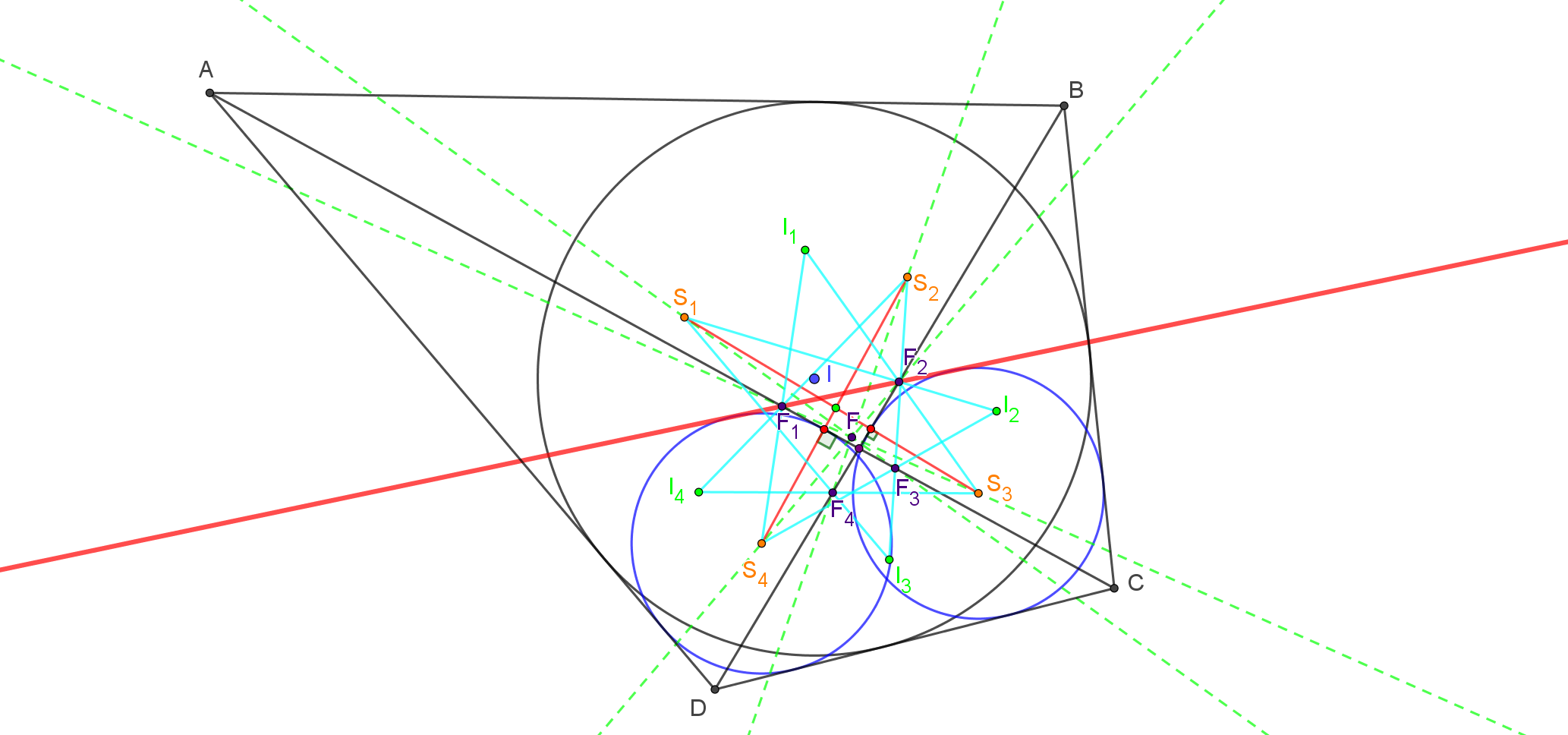
8. 2. Четырехугольник FAFBFCFD описанный с центром F.

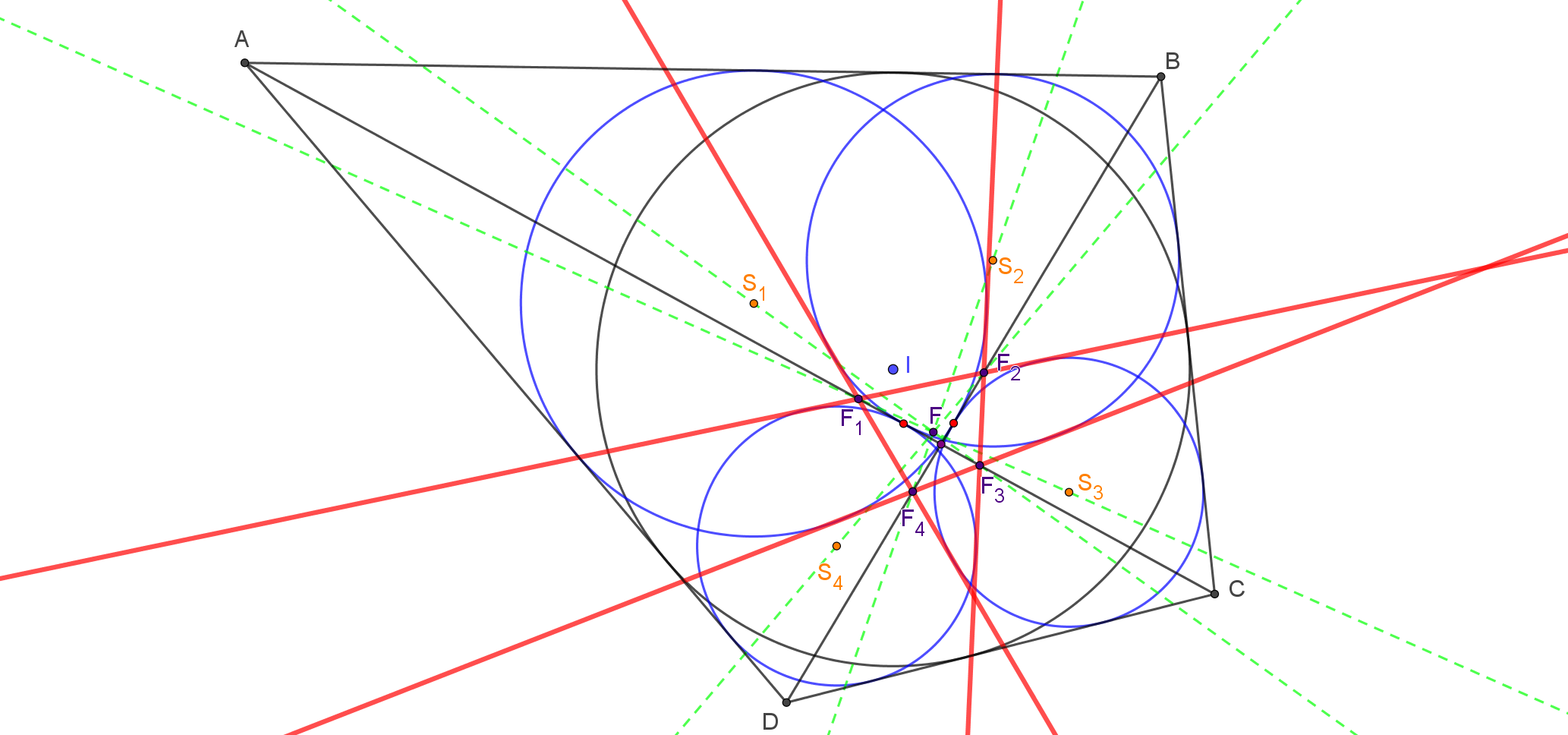
Рассмотрим четырехугольник SDFAFFC. В нем точки FB и SB изогонально сопряжены, так как ∠FASBSD = ∠FCSBFD (но SB лежит снаружи), ∠FASDSB = ∠FCSDFB, ∠FAFSB = ∠FBFFC (согласно [*7. 3*](#п_7_3)). Если так, то ∠FAFBF = ∠FCFBF, потому что точки FB, F и SD коллинеарны. Отсюда F – центр вписанной окружности FAFBFCFD.

9. 1. FAFB касается вписанных окружностей ΔACD и ΔBCD.

В четырехугольнике FASBFCF точки FD и SD изогонально сопряжены. Это верно, так как было доказано, что ∠FASBSD = ∠FCSBFD, ∠FAFSD = ∠FCFFD, ∠FASDSB = ∠FCSDF. Тогда ∠FDFAF = ∠SDFAIDA = ∠(IDASB, IABSD). Этот угол равен углу между биссектрисами углов ∠FBFAFC и ∠FDFAFC. Так как они изогонали в угле ∠FCFAF, то они изогонали в ∠SBFASD, значит, биссектрисы углов ∠FBFAFC и ∠FDFAFC перпендикулярны IABSD, IDASB соответственно. Поэтому биссектриса внешнего угла ∠FBFAFC проходит через SD. Так как FBF – биссектриса ∠FAFBFC, то утверждение пункта доказано.

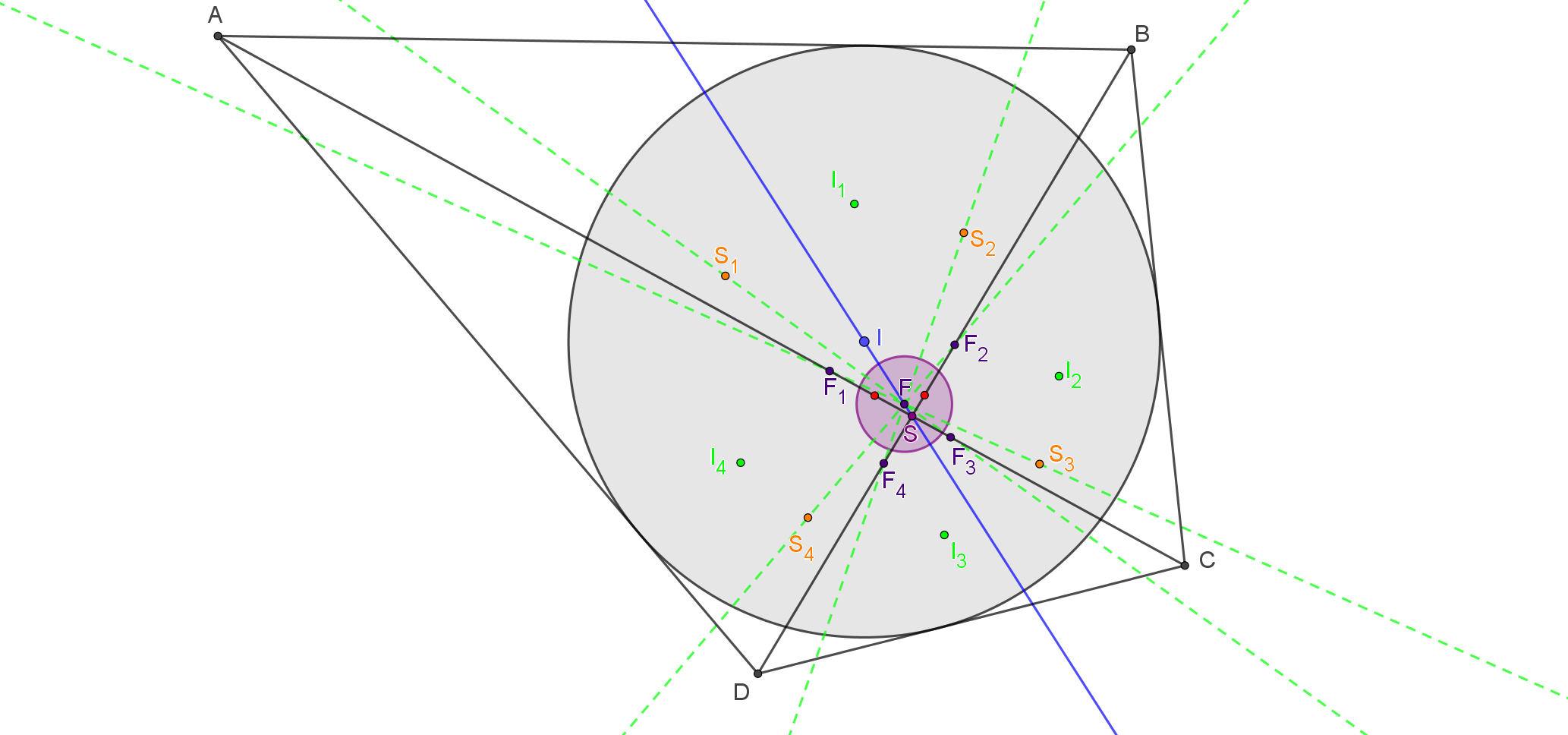
Таким образом, SCSD – биссектриса угла ∠(FAFB, CD).





9. 2. Четырехугольники ABFBFA, BCFCFB, CDFDFC, DAFAFD описанные.

Этот факт является частным случаем [*пункта 1*](#п_1). У вписанных окружностей ACD, BCD и ABS есть общая касательная. Это прямая FAFB.



9. 3. Точка F лежит на IS.

Мы знаем из [*пункта 8. 1*](#п_8_1), что центр вписанной окружности малого четырехугольника – это F. В [*9. 1*](#п_9_1) было показано, что красные касательные пересекаются в точках FA, FB, FC, FD.

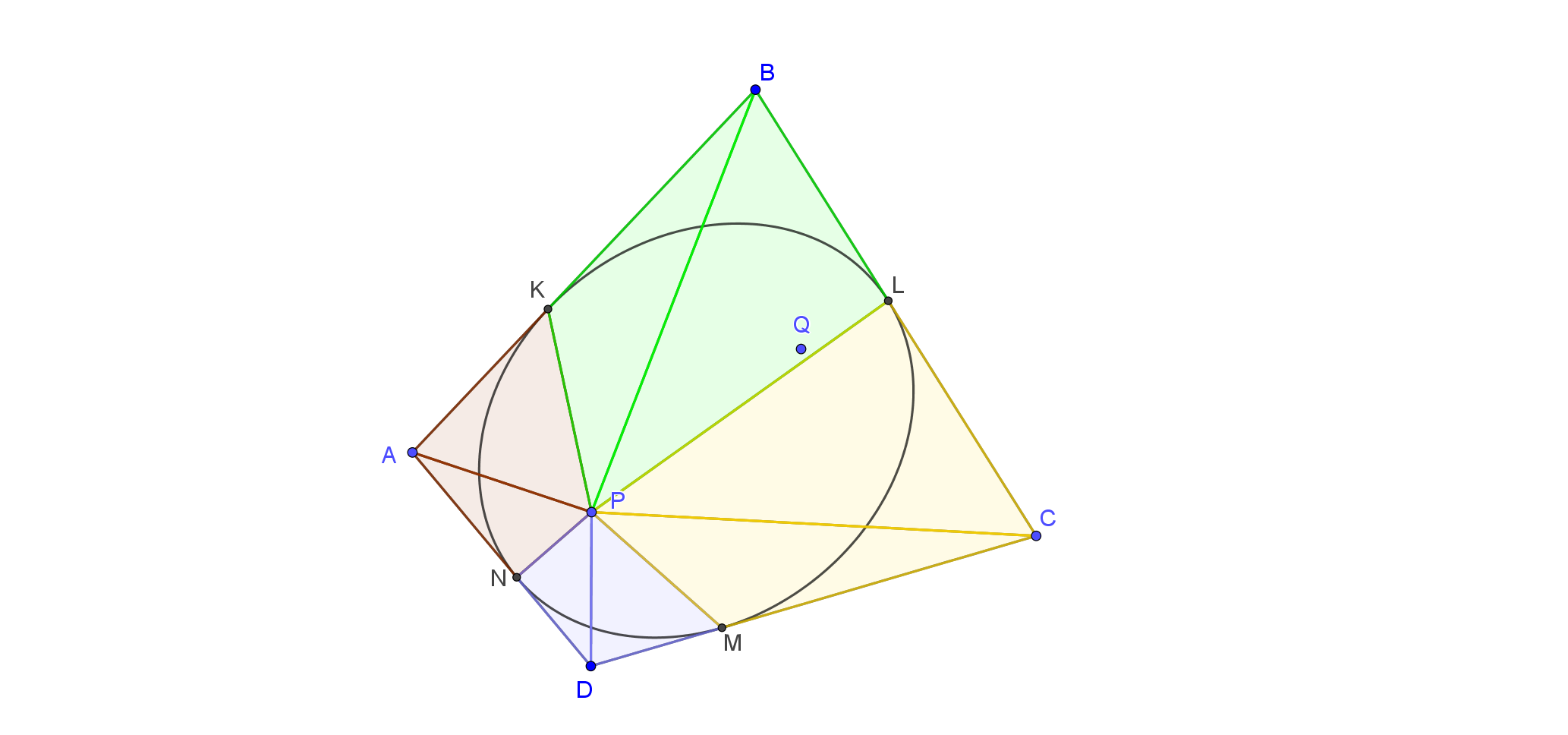
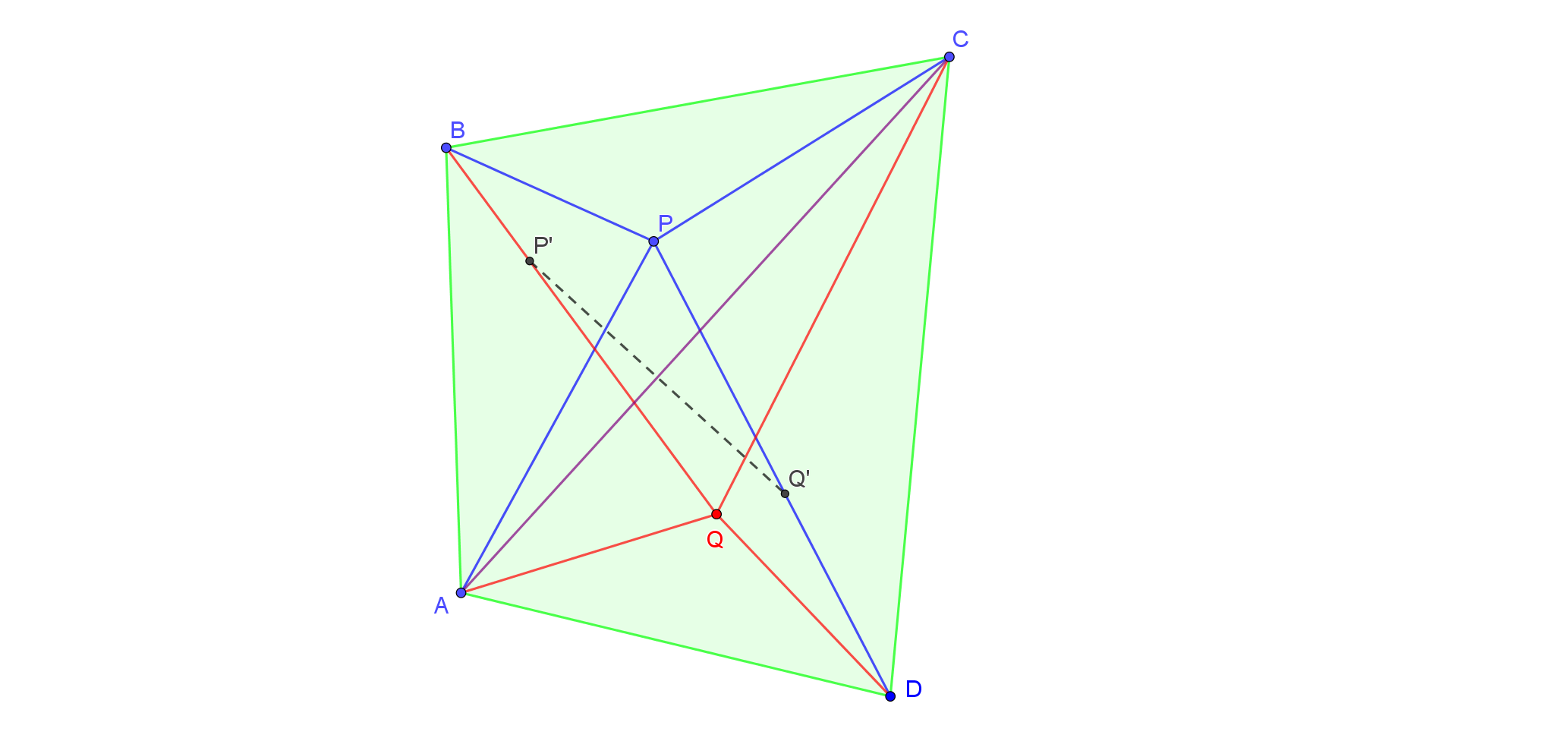
Рассмотрим вписанную окружность ABCD, вписанную окружность ABD и вписанную окружность FAFBFCFD. По *теореме о 3 центрах гомотетии* центр положительной гомотетии вписанных окружностей ABCD и FAFBFCFD лежит на диагонали BD. Аналогично этот центр лежит на AC. То есть это точка пересечения диагоналей – S. Поэтому S, F и I лежит на одной прямой (прямая центров этих окружностей).

# Приложение 1. Доказательство базовых фактов и теорем.

**Теорема 1**[[4]](#footnote-4)**.**

1 способ. Пусть P’ – точка, изогонально сопряженная P в ABC, Q’ – точка, изогонально сопряженная Q в ADC. Тогда ∠P’AC = ∠BAP = ∠QAD = ∠ CAQ’. Аналогично ∠P’CA = ∠ACQ’. Значит, точки P’ и Q’ симметричны относительно AC. P’ лежит на BQ, Q’ лежит на DP. В треугольнике ΔAPC B и Q’ изогонально сопряжены, значит BP и DP – изогонали в ∠APC, значит, ∠APB + ∠CPD = 180°.

2 способ. Впишем в четырехугольник эллипс с фокусами в P и Q. Соединим P с точками касания эллипса и сторон четырехугольника. Воспользуемся фактом, что касательные из одной точки видны из фокуса под одинаковым углом (доказательство см. в [1] на стр. 17). Таким образом, ∠APB + ∠CPD = ∠APD + ∠BPC = 180°.



Следствие из теоремы 1.

Построим Q таким образом: пусть DP и DQ – изогонали в ∠D, BP и BQ – изогонали в ∠B. Рассмотрим четырехугольник BPDQ. В нем точки A и C изогонально сопряжены. Тогда по [*теореме 1*](#Т1) ∠(BA, PA) + ∠(DA, QA) = 180°. Аналогично ∠(BC, PC) + ∠(DC, QC) = 180°, что означает, что P и Q изогонально сопряжены в четырехугольнике ABCD.

Факт 1.

Обозначим HA, HB, HC, HD – соответственно ортоцентры треугольников ΔBCD, ΔACD, ΔABD, ΔABC. Так как ортоцентр в треугольнике изогонально сопряжен центру описанной окружности, то соответственно в углах ∠A, ∠B, ∠C, ∠D пары прямых (AO, AHC), (BO, BHD), (CO, CHA), (DO, DHB) – изогонали. Из этого следует утверждение факта.

Факт 2.

Рассмотрим четырехугольник PQRS. Точка I в нем такова, что ∠PIQ + ∠RIS = 180°. Его вершины лежат на биссектрисах углов ∠A, ∠B, ∠C, ∠D.

Заметим, что ∠QPF = ∠EPS = 90° + ∠A/2 , значит, ∠EPQ = ∠SPF. Так как для угла ∠EPF AP изогональна PK, то это верно и для ∠QPS.

Аналогично биссектрисы ∠B, ∠C, ∠D изогональны QL, RM, SN для соответствующих углов четырехугольника PQRS.

Таким образом, если биссектрисы углов ∠A, ∠B, ∠C, ∠D пересекаются в одной точке, то эта точка будет изогонально сопряженной в PQRS точке I. Но они пересекаются в одной точке по [*следствию из теоремы 1*](#Сл_Т1), поскольку ∠PIQ + ∠RIS = 180°.

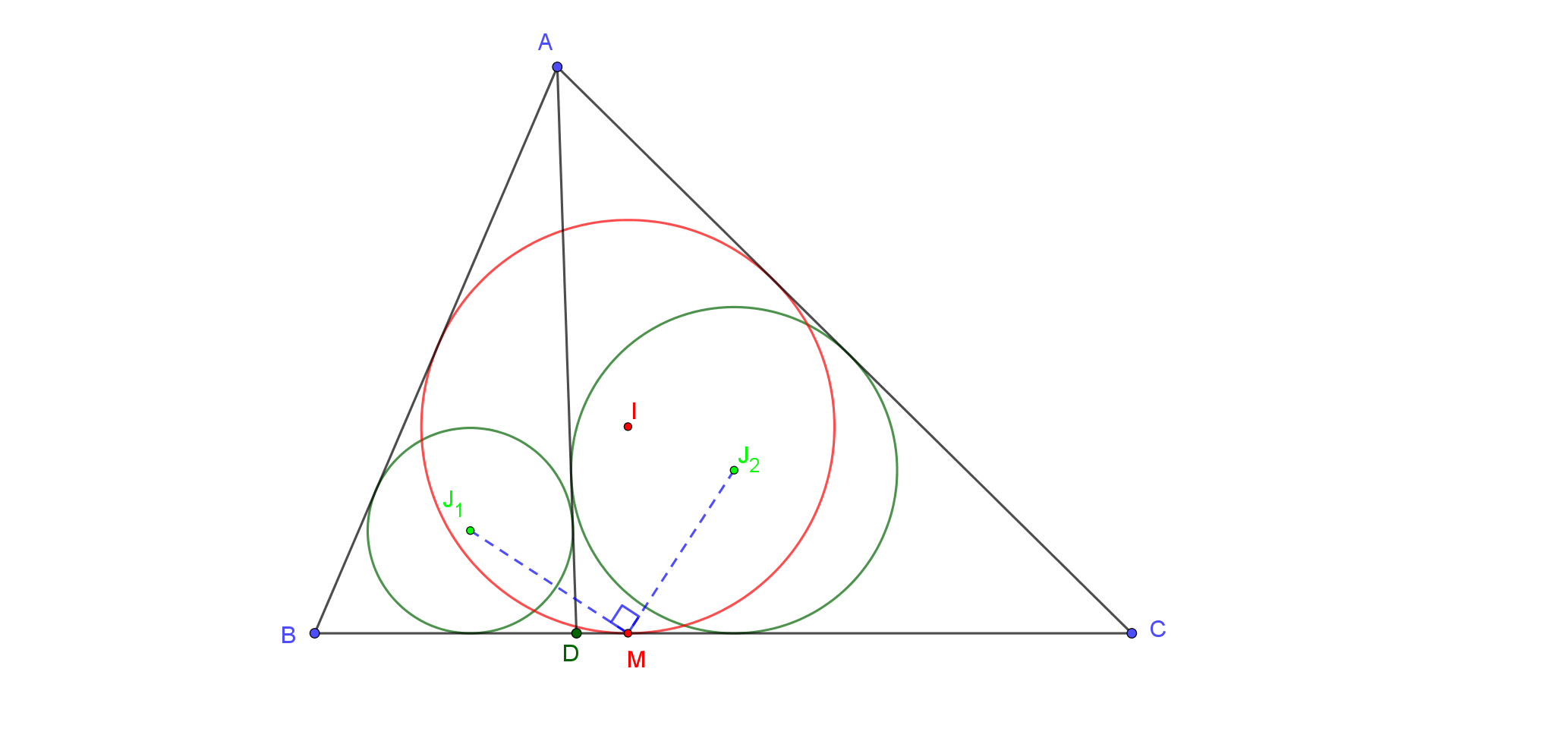
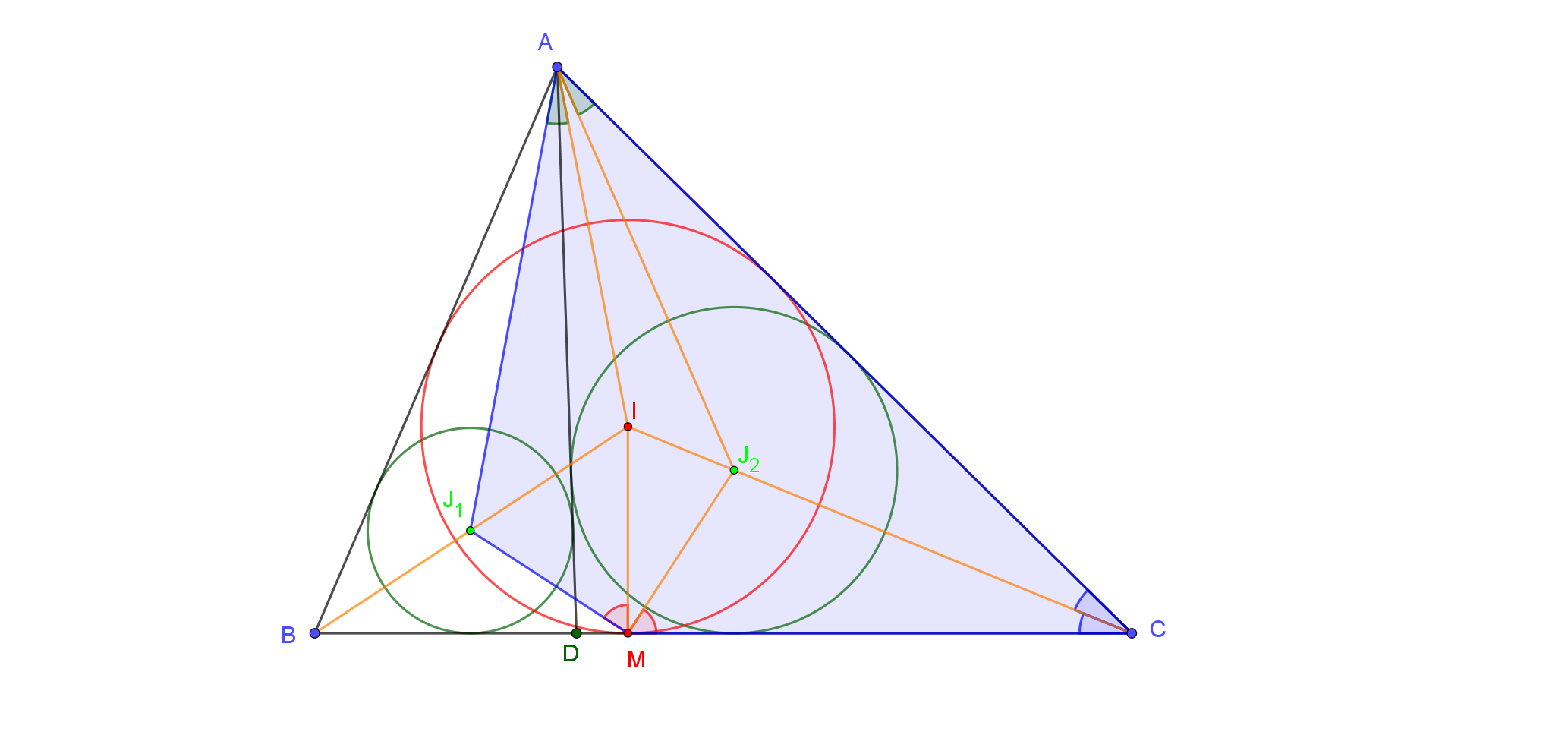
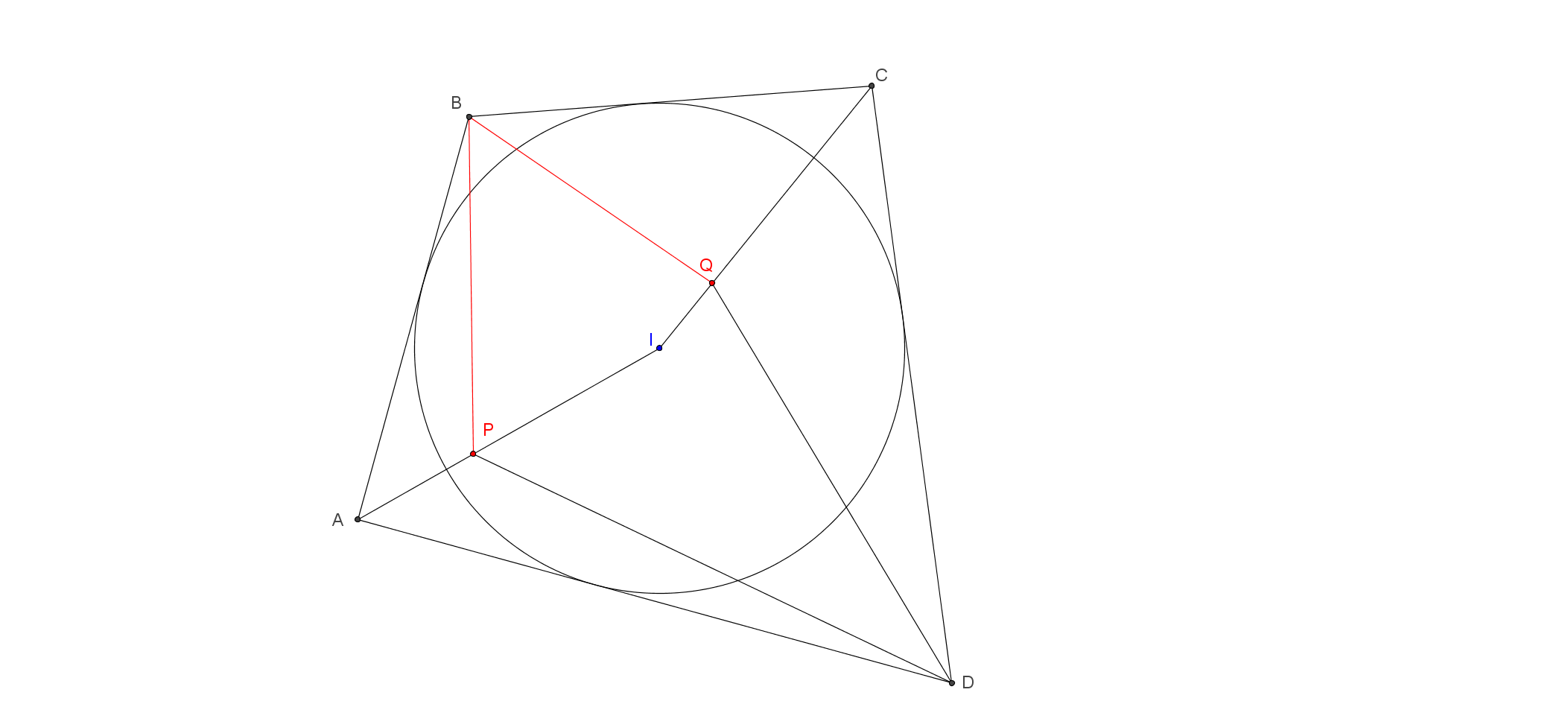
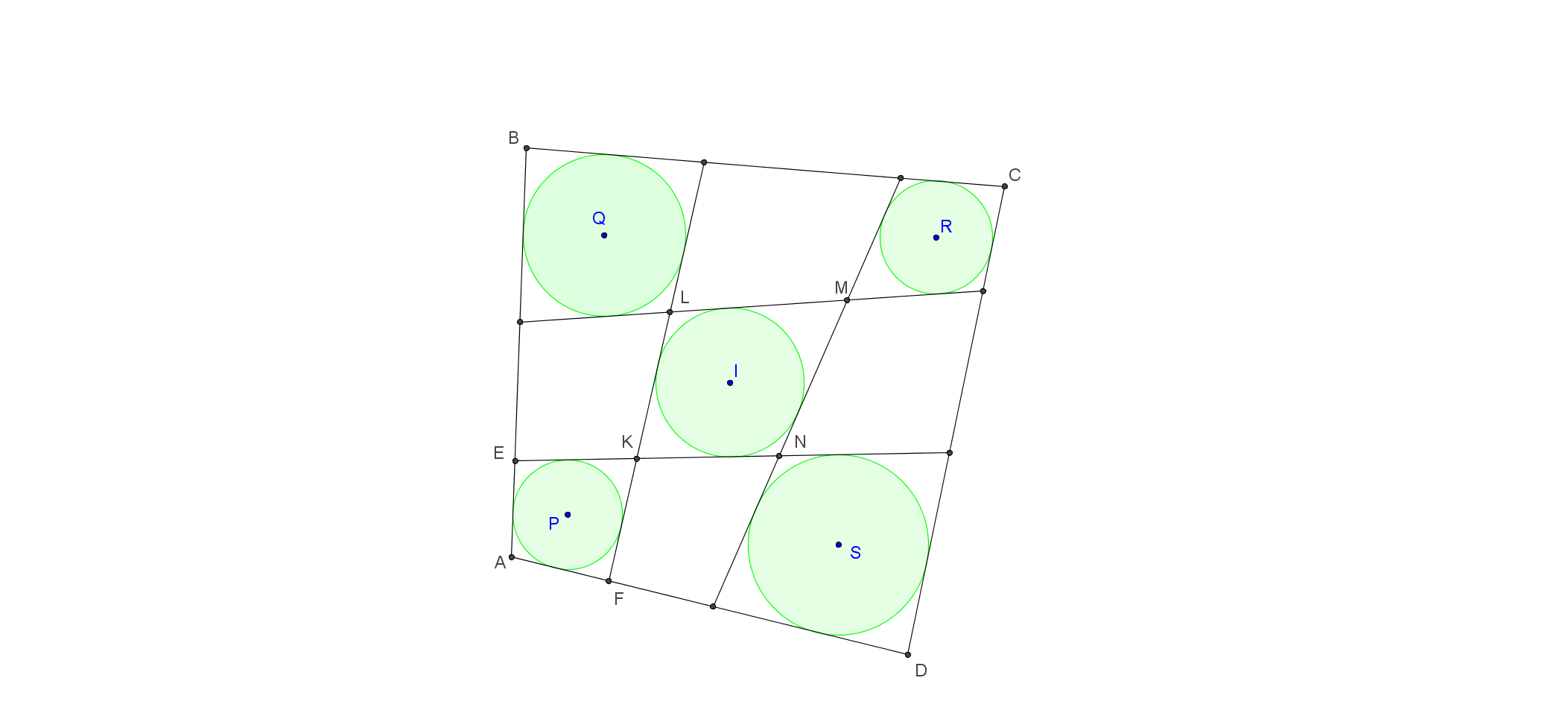
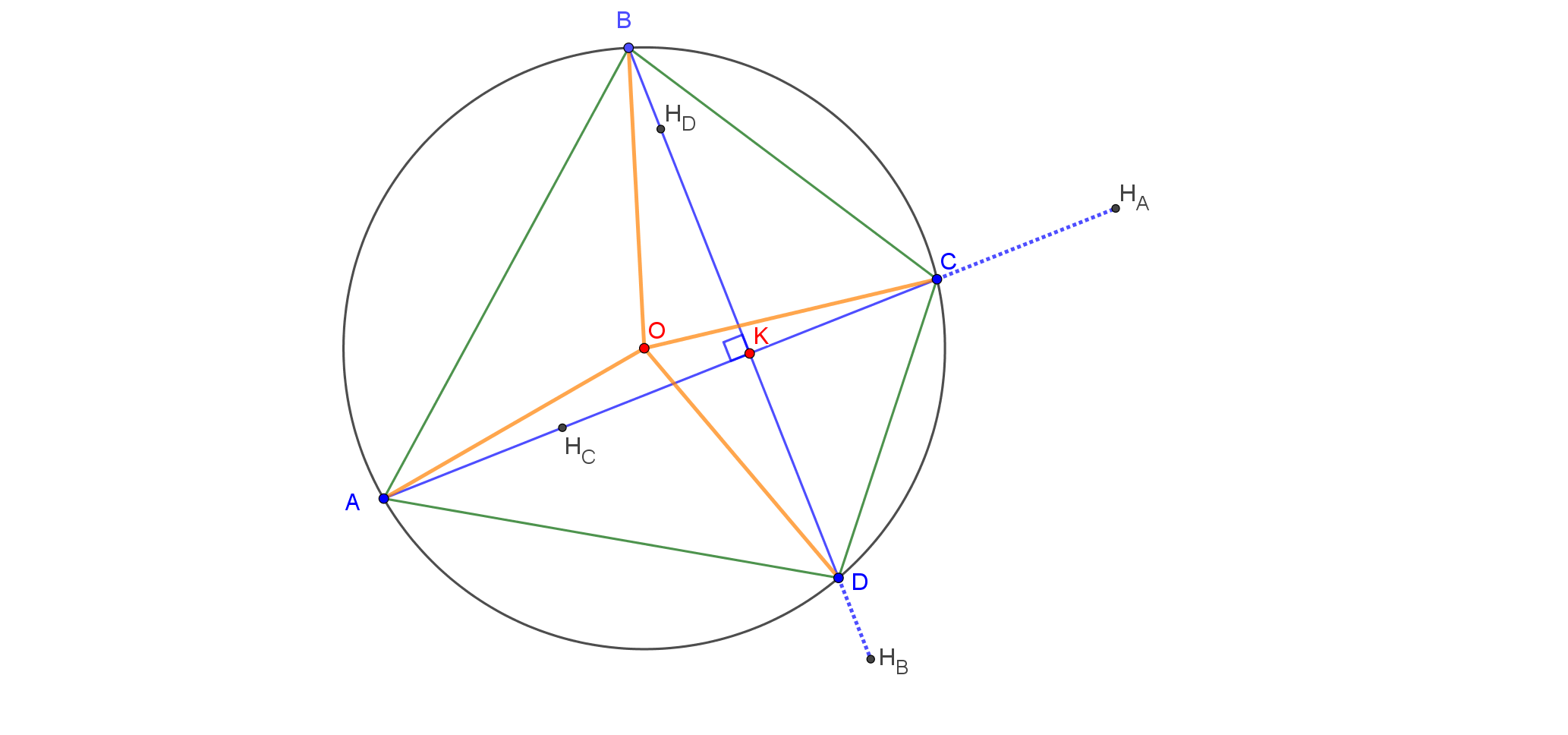
Факт 3.

Рассмотрим четырехугольник ABQD. В нем ∠AIB + ∠QID = 180°, AI, AP – одна биссектриса, DP, DI – изогонали. Значит, в ABQD I и P изогонально сопряжены. Тогда ∠ABP = ∠QBI ⇒ ∠PBQ = ½ ∠B.

Факт 4.

Рассмотрим четырехугольник J1ACM. ∠J1IM + ∠AIC = (90° – ½ ∠B) + (90° + ½ ∠B), значит для существует изогонально сопряженная точка. Так как CI – биссектриса ∠C, то CI и CJ2 – изогонали в ∠C. Так как ∠CAJ2 = ½ ∠CAD, ∠J1AI = ½ ∠A – ½ ∠BAD. Значит ∠CAJ2 = ∠J1AI. Исходя из единственности точки пересечения AJ2 и CJ2, заключаем, что I и J2 изогонально сопряжены в J1ACM. Поэтому ∠J1MI = J2MC, ∠IMJ2 +∠J1MI = (90° – ∠J2MC) + ∠J1MI = 90°, ч.т.д.

Интересное доказательство можно найти в источнике [6].



# Приложение 2.

Одинаковым цветом выделены четырехугольники и треугольники, эквивалентные при циклическом переименовании точек.

Таблица . Изогонально сопряженные точки в четырехугольниках

|  |  |
| --- | --- |
| Четырехугольник | Изогонально сопряженные точки |
| ABCD | **I – центр вписанной окружности** |
| IABIBCICDIDA | **P, Q** |
| IABIBCICDIDA | **O, S** |
| ΔAIABIDA | **K1,4, SA** |
| ΔBIABIBC | **K1,2, SB** |
| ΔCIBCICD | **K2,3, SC** |
| ΔDICDIDA | **K3,4, SD** |
| ΔAIABIDA | **SA, P’A** |
| ΔBIABIBC | **SB, P’B** |
| ΔCIBCICD | **SC, P’C** |
| ΔDICDIDA | **SD, P’D** |
| ΔIABSCIDA | **FA, Q** |
| ΔIABSDIBC | **FB, P** |
| ΔIBCSAICD | **FC, Q** |
| ΔICDSBIDA | **FD, P** |
| AIABSCIDA | **FA, SA** |
| BIABSDIBC | **FB, SB** |
| CIBCSAICD | **FC, SC** |
| DICDSBIDA | **FD, SD** |
| SAFBSCFD | **Q, F** |
| SBFASDFC | **P, F** |
| SASBSCSD | **I, F** |
| ASBSCSD | **I, FA** |
| BSASDSC | **I, FB** |
| CSBSASD | **I, FC** |
| DSASBSC | **I, FD** |
| SCFBFFD | **FA, SA** |
| SDFAFFC | **FB, SB** |
| SAFBFFD | **FC, SC** |
| SBFAFFC | **FD, SD** |
| FAFBFCFD | **F – центр вписанной окружности** |
| FBSCFDF | **FA, SA** |
| FASDFCF | **FB, SB** |
| FBSAFDF | **FC, SC** |
| FASBFCF | **FD, SD** |

# Благодарности.

Я благодарен за ценные обсуждения и внимание к работе П. А. Кожевникову и А. А. Заславскому.

# Литература.

[1] А. В. Акопян, А. А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка – М.: МЦНМО 2011 г.

[2] А. В. Акопян. Геометрия в картинках – 2017 г.

[3] П. А. Кожевников. Изогонально сопряженные точки – «Квант» №1, 2016 г.

[4] А. Куликова, Д. Прокопенко. Теорема об изогоналях – «Квант» №4, №5, 2018 г.

[5] И. Вайнштейн. Задача М1523 из Задачника «Кванта» (решение в №3 1996 г.)

[6] Н. Белухов, П. Кожевников. Описанные четырехугольники и ломаные – «Квант» №1, 2010 г.

[7] Н. Белухов. Задача М2213\* из Задачника «Кванта» (решение в №4 2011 г.)

1. Этот факт найден автором автором. [↑](#footnote-ref-1)
2. Задача М2213, предложенная Н. Белуховым, решенная самостоятельно автором этой работы. Подробнее – [7]. [↑](#footnote-ref-2)
3. Этот факт был до меня обнаружен А. Заславским. См. [5]. [↑](#footnote-ref-3)
4. В этом доказательстве для любых точек X, Y, Z ∠XYZ означает ориентированный угол ∠(XY, YZ). [↑](#footnote-ref-4)